Cap. 2 : Probabilidad

Alexandre Blondin Massé

Departamento de Informática y Matematica
Université du Québec à Chicoutimi

13 de junio del 2015
Modelado de sistemas aleatorios
Ingeniería de sistemas, producción y ambiental

Tabla de contenidos

Espacio muestral

Definición

*El **espacio muestral** de un experimento, denotado por S, es el conjunto de todos los resultados posibles de ese experimento.*

Definición

*Sea S el espacio muestral de un experimento. Cualquier subconjunto $E \subseteq S$ es un **evento**. Si el resultado del experimento está contenido en E, entonces dicemos que el **evento E ocurre (u occurrió)**.*

Ejemplos (1/3)

- Estamos interesado en el **género** de un niño por nacer. Entonces
$$S = \{M, F\},$$
donde M significa **masculino** y F significa **femenino**.
- $E = \{M\}$ es el evento «**Será un chico**»;
- $E = \{F\}$ es el evento «**Será un chica**»;
- $E = \{M, F\}$ es el evento «**Será un chico o una chica**»;
- $E = \emptyset$ es el evento «**No será un chico o una chica**»;

Ejemplos (2/3)

- Hay una carrera entre **7 caballos** numerados de 1 a 7.
- Entonces, S es el conjunto de las **7-tuplas** de números en $\{1, 2, \ldots, 7\}$ sin repetición, que se llaman **permutaciones**.
- Por ejemplo, el resultado $(2, 3, 1, 6, 5, 4, 7)$ significa que el caballo 2 ha llegado primero, seguido por el caballo 3, el caballo 1, etc.
- ¿Qué es el **tamaño** de S?

Ejemplos (3/3)

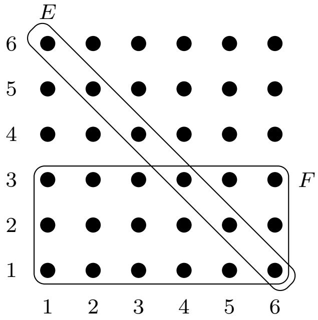
- En una tienda, se mide el **tiempo en segundos** que transcurre antes de que un cliente llegue.
- ¿Qué es S?
- Hay **varias** posibilidades:
  - Si no hay valor máximo, $S = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
  - Si la tienda esta abierta 10 **horas**, por ejemplo, entonces $S = (0, 36\ 000)$.
  - También se puede que los valores de S son **enteros**:

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, 36\ 000\}.$$

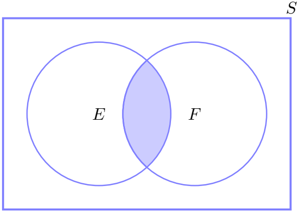
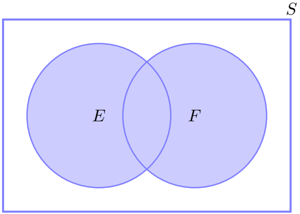
- A veces, cuando $|S|$ est **muy grande**, por simplicidad, suponemos que $S \subseteq \mathbb{R}$.

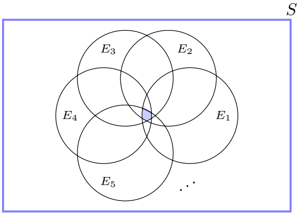
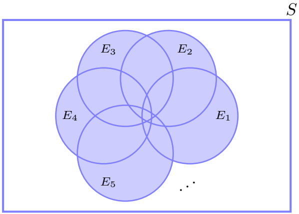
Eventos son conjuntos

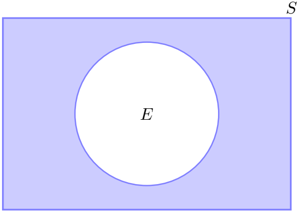
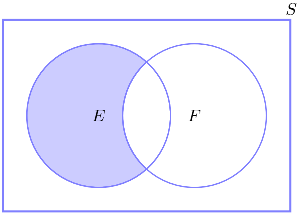
- **Dos** dados **regulares** son lanzados.
- $S = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$.
- Sea E el evento «la **suma** es 7». Entonces $E = \{(1, 6), (2, 5), \ldots, (6, 1)\}$.
- Sea F el evento «el **secondo dado** es ≤ 3». Entonces $F = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 3)\}$.
- $E \cap F = \{(4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ es el evento «la suma de los dados es 7 **y** el secondo dado es 1, 2 ou 3».



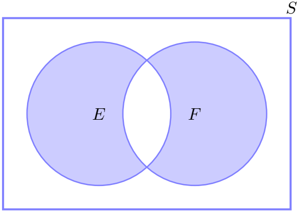
Operaciones de conjuntos (1/4)

Operación	Notación	Diagrama de Venn
Intersección	$E \cap F$	
Unión	$E \cup F$	

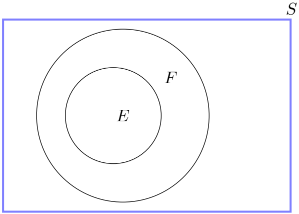
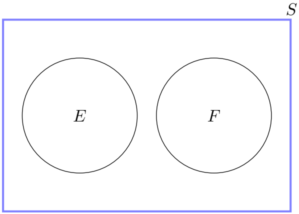
Operación	Notación	Diagrama de Venn
Intersección generalizada	$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$	
Unión generalizada	$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$	

Operación	Notación	Diagrama de Venn
Complemento	$\overline{E}$	
Diferencia	$E - F$	

Operaciones de conjuntos (4/4)

Operación	Notación	Diagrama de Venn
Diferencia simétrica	$E \oplus F$	

Relaciones básicas entre conjuntos

Relación	Notación	Diagrama de Venn
Inclusión	$E \subseteq F$	
Disjuntos	$E \cap F = \emptyset$	

Otras relaciones útiles

- **Conmutatividad :**
  $E \cup F = F \cup E$
  $E \cap F = F \cap E.$

- **Asociatividad :**
  $E \cup (F \cup G) = E \cup (F \cup G)$
  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G.$

- **Distributividad :**
  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
  $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

- **Leyes de De Morgan :**
  $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$
  $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}$

Tabla de contenidos

Tres axiomas fundamentales

Sea S un **espacio muestral**. Está asociado con cada evento $E \subseteq S$ un **número real** $P(E)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cualquier evento $E \subseteq S$, $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. Para cualquiera serie (finita o infinita) de eventos **disjuntos dos a dos** E_1, E_2, ...,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Consecuencia de los axiomas

Proposición

Para cualquier evento $E \subseteq S$,

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

Demostración

Claramente, E y $\overline{E}$ son ***disjuntos****. Por los* ***axiomas 2 y 3****, obtenemos*

$$1 = P(S) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E}).$$

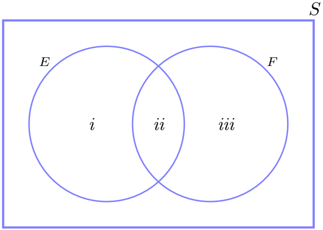
Principio de inclusión-exclusión (1/3)

Proposición

Sean $E, F \subseteq S$ dos eventos. Entonces

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Se entiendo más fácilmente con un diagrama de Venn :



Principio de inclusión-exclusión (2/3)

Demostración

Se ve que la regiones (i), (ii) y (iii) son ***disjuntos****. Por el* ***axioma 3****, obtenemos*

$$\begin{aligned} P(E) &= P(i) + P(ii) \\ P(F) &= P(ii) + P(iii) \\ P(E \cup F) &= P(i) + P(ii) + P(iii). \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(ii) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Principio de inclusión-exclusión (3/3)

Se generaliza a **varios conjuntos**

Proposición

Sean $E, F, G \subseteq S$ ***tres*** *eventos. Entonces*

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) \\ &\quad -P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G). \end{aligned}$$

Proposición

Sea $E_i \subseteq S$ *un evento,* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n} P\left(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n}\right)\right].$$

Tabla de contenidos

Dos principios básicos

Principio de la suma

Sean A y B dos conjuntos. Si hay m formas de elegir un objeto de A y n formas de elegir un objeto de B, entonces hay $m + n$ formas de elegir un objeto de A o B, asumiendo que no aparece ningún objeto **en ambos A y B**.

Principio del producto

Sean A y B dos conjuntos. Si hay m formas de elegir un objeto de A y n formas de elegir un objeto de B, entonces hay mn formas de elegir un objeto de A y un objeto de B.

Ejemplo

- **Dos bolas** se extraen al azar de una urna **sin reemplazo**.
- Hay 6 **bolas blancas** y 5 **bolas negras** en la urna.
- ¿Cuál es la probabilidad que une bola sea **blanca** y la otra **negra**?

Ejemplo

- **Dos bolas** se extraen al azar de una urna **sin reemplazo**.
- Hay 6 **bolas blancas** y 5 **bolas negras** en la urna.
- ¿Cuál es la probabilidad que une bola sea **blanca** y la otra **negra**?
- Hay 11 opciones para la primera bola y 10 para la seconda, entonces $11 \cdot 10 = 110$ en total, por el **principio de la suma**.
- Hay **dos posibilidades**:
  - **blanca/negra**, entonces hay $6 \cdot 5 = 30$ formas;
  - **negra/blanca**, entonces hay $5 \cdot 6 = 30$ formas.
- Entonces, la probabilidad buscada es $(30 + 30)/110 = 6/11$.

Permutaciones (1/5)

- ¿**De cuántas maneras** diferentes se pueden ordenar las letras a**,** b **y** c?
- ¿**De cuántas maneras** se pueden ordenar n **letras**?

Permutaciones (1/5)

- ¿**De cuántas maneras** diferentes se pueden ordenar las letras a**,** b **y** c?
- ¿**De cuántas maneras** se pueden ordenar n **letras**?
- Hay 6 **maneras** para a, b y c:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Permutaciones (1/5)

- ¿**De cuántas maneras** diferentes se pueden ordenar las letras a**,** b **y** c?
- ¿**De cuántas maneras** se pueden ordenar n **letras**?
- Hay 6 **maneras** para a, b y c:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

- En general, si hay n **letras**, entonces hay

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

arreglos posibles.

Permutaciones (2/5)

- Deseamos colocar 10 libros en un estante.
- Hay
  - 4 libros de matematica,
  - 3 libros de química,
  - 2 libros de historia y
  - 1 libro de lingüística.
- Se pueden ordenar los libros de cualquiera manera, pero libros de **mismo tema** deben ser **agrupados**.
- ¿Cuántos arreglos hay?

Permutaciones (3/5)

- Primero asumen que los temas aparecen en **el orden M/Q/H/L**
- Hay
  - $4!$ maneras de colocar los libros de matematica,
  - $3!$ para química,
  - $2!$ para historia,
  - $1!$ para lingüística.
- Si **el orden** es **Q/H/L/M**, entonces hay el mismo **número de maneras** de ordenar los libros.
- Como hay 4! maneras de eligir el orden de los temas, el número total es $4!4!3!2!1! =$ **6 912**.

Permutaciones (4/5)

- En un curso de probabilidad, hay 6 **hombres** y 4 **mujeres**.
- Los 10 estudiantes toman un examen y obtienen **resultados distintos**.
- Nos centramos en la **ranking**.
- ¿**Cuántas** rankings hay (los estudiantes son todos diferentes)?
- Asumiendo que todos las rankings son **igualmente probables**, ¿cual es la probabilidad que las 4 mujeres tienen los 4 mejores resultados?

Permutaciones (5/5)

- Hay $10! = 3\ 628\ 800$ rankings.

Permutaciones (5/5)

- Hay $10! = 3\ 628\ 800$ rankings.
- Para que las 4 mujeres sean primeras, necesitamos que los 6 hombres sean últimos.
- Hay
  - $4!$ maneras de ordenar las 4 mujeres y
  - $6!$ maneras de ordenar los 6 hombres.
- Entonces la probabilidad buscada es

$$\frac{4!6!}{10!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{210}.$$

Definición

*Sean n y k dos enteros, donde $0 \leq k \leq n$. El **número** de maneras de elegir k **objetos** con **orden** en un conjunto de n **objetos** es*

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

*Una k-tupla que representa un orden se llama **k-arreglo** o **k-permutación**.*

Ejemplo

- Sea une carrera de 10 **caballos** con números 1, 2, . . ., 10.
- Deseamos contar el número de rankings para los 3 **primeros** caballos solamente.
- Un 3-**arreglo** (o una 3-**permutación**) por ejemplo es $(5, 10, 1)$.
- El número de ranking es

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \mathbf{720}.$$

Definición

*Sean dos enteros n y k, $0 \leq k \leq n$. El número de maneras de elegir k **objetos no ordenados** en un conjunto de n **objetos** es*

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Un conjunto de k objetos represenando una opción se llama **k-combinación**.*
También se utiliza la notación

$$\binom{n}{k}$$

para denotar $C(n, k)$.

Ejemplo

- ¿Cuántos grupos (en **cualquier orden**) de **3 letras** sin repetición se pueden formar con las letras A, B, C, D y E?

Ejemplo

- ¿Cuántos grupos (en **cualquier orden**) de **3 letras** sin repetición se pueden formar con las letras A, B, C, D y E?
- Las opciones posibles son

$$\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, B, E\}, \{A, C, D\}, \{A, C, E\},$$
$$\{A, D, E\}, \{B, C, D\}, \{B, C, E\}, \{B, D, E\}, \{C, D, E\}.$$

- Entonces hay **10 grupos**.

Relación entre permutaciones y combinaciones

Proposición

Sean n ***y*** k *dos enteros,* $0 \leq k \leq n$*. Entonces*

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!}.$$

Relación entre permutaciones y combinaciones

Proposición

*Sean n **y** k dos enteros, $0 \leq k \leq n$. Entonces*

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!}.$$

Demostración

*Podemos elegir k objetos **ordenados** en un conjunto de n objetos de $P(n,k)$ maneras. Pero, en el caso de combinaciones, el orden no es importante. Entonces **cada grupo** es contado $k!$ **veces**: el resultado se **divide** por $k!$ para obtener $C(n,k)$.*

Ejemplo (1/3)

- Deseamos formar un grupo de 5 **personas** elegiendo en un grupo de 6 **hombres** y 9 **mujeres**.
- ¿Cuál es la probabilidad que el grupo contiene exactamente 2 **mujeres** y 3 **hombres** ?

Ejemplo (1/3)

- Deseamos formar un grupo de 5 **personas** elegiendo en un grupo de 6 **hombres** y 9 **mujeres**.
- ¿Cuál es la probabilidad que el grupo contiene exactamente 2 **mujeres** y 3 **hombres** ?
- Hay $C(15, 5)$ maneras de formar un grupo de 5 **personas** a partir de un grupo de 15 **personas**.

Ejemplo (1/3)

- Deseamos formar un grupo de 5 **personas** elegiendo en un grupo de 6 **hombres** y 9 **mujeres**.
- ¿Cuál es la probabilidad que el grupo contiene exactamente 2 **mujeres** y 3 **hombres** ?
- Hay $C(15,5)$ maneras de formar un grupo de 5 **personas** a partir de un grupo de 15 **personas**.
- También, hay $C(9,2)C(6,3)$ grupos formados de 2 **mujeres** entre las 9 y 3 **hombres** entre los 6.
- Entonces, la probabilidad es $C(9,2)C(6,3)/C(15,5) = \mathbf{240/1001}$.

Ejemplo (2/3)

- En un equipo de volleyball, hay 6 **hombres** y 6 **mujeres**.
- Deseamos creer **pares** de jugadores.
- Asumiendo que los pares son hechas al azar, ¿Cuál es la probabilidad que **ningún hombre** sea con **una mujer**?

Ejemplo (3/3)

- Hay $C(12,2)$ maneras de formar el primer par, $C(10,2)$ para el secondo, $C(8,2)$ para el tercero, etc.

Ejemplo (3/3)

- Hay $C(12, 2)$ maneras de formar el primer par, $C(10, 2)$ para el secondo, $C(8, 2)$ para el tercero, etc.
- Entonces, hay

$$C(12, 2) \cdots C(2, 2) = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} \cdots \frac{2 \cdot 1}{2} = \mathbf{\frac{12!}{2^6}}$$

maneras de formar los pares.

Ejemplo (3/3)

- Hay $C(12,2)$ maneras de formar el primer par, $C(10,2)$ para el secondo, $C(8,2)$ para el tercero, etc.
- Entonces, hay
$$C(12,2)\cdots C(2,2) = \frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2} = \mathbf{\frac{12!}{2^6}}$$
maneras de formar los pares.
- Pero el orden de los pares no es importante, entonces hay en total $12!/(2^6 6!)$ **pares**.

Ejemplo (3/3)

- Hay $C(12,2)$ maneras de formar el primer par, $C(10,2)$ para el secondo, $C(8,2)$ para el tercero, etc.
- Entonces, hay
$$C(12,2)\cdots C(2,2) = \frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2} = \mathbf{\frac{12!}{2^6}}$$
maneras de formar los pares.
- Pero el orden de los pares no es importante, entonces hay en total $12!/(2^6 6!)$ **pares**.
- Similarmente, hay $(C(6,2)C(4,2)C(2,2)/3!)^2 = \mathbf{(6!/(2^3 3!))^2}$ donde ningún hombre es con una mujer.

Ejemplo (3/3)

- Hay $C(12,2)$ maneras de formar el primer par, $C(10,2)$ para el secondo, $C(8,2)$ para el tercero, etc.
- Entonces, hay
$$C(12,2)\cdots C(2,2) = \frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2} = \mathbf{\frac{12!}{2^6}}$$
maneras de formar los pares.
- Pero el orden de los pares no es importante, entonces hay en total $12!/(2^6 6!)$ **pares**.
- Similarmente, hay $(C(6,2)C(4,2)C(2,2)/3!)^2 = \mathbf{(6!/(2^3 3!))^2}$ donde ningún hombre es con una mujer.
- La probabilidad buscada es
$$\left(\frac{6!}{2^3 3!}\right)^2 / \frac{12!}{2^6 6!} = \frac{5}{231} \approx \mathbf{0{,}0216}.$$

La paradoja del cumpleaños (1/2)

- Si hay n **personas** en una habitación, ¿cuál es la probabilidad que nadie nació **el mismo día**?
- Suponemos que todas las fechas son **igualmente probables**).
- ¿A partir de cuánto es la probabilidad **menos que** $1/2$?
- Por simplicidad, suponemos que **nadie** nació el **29 de febrero**.

La paradoja del cumpleaños (2/2)

- Claramente, hay 365^n resultados posibles.

La paradoja del cumpleaños (2/2)

- Claramente, hay 365^n resultados posibles.
- Para que las fechas sean **distintas**, hay
  - 365 opciones para la primera persona,
  - 364 para la seconda, etc.

La paradoja del cumpleaños (2/2)

- Claramente, hay 365^n resultados posibles.
- Para que las fechas sean **distintas**, hay
  - 365 opciones para la primera persona,
  - 364 para la seconda, etc.
- Entonces, hay $P(365, n)$ en total.

La paradoja del cumpleaños (2/2)

- Claramente, hay 365^n resultados posibles.
- Para que las fechas sean **distintas**, hay
  - 365 opciones para la primera persona,
  - 364 para la seconda, etc.
- Entonces, hay $P(365, n)$ en total.
- La probabilidad buscada es

$$p(n) = P(365, n)/365^n.$$

La paradoja del cumpleaños (2/2)

- Claramente, hay 365^n resultados posibles.
- Para que las fechas sean **distintas**, hay
  - 365 opciones para la primera persona,
  - 364 para la seconda, etc.
- Entonces, hay $P(365, n)$ en total.
- La probabilidad buscada es

$$p(n) = P(365, n)/365^n.$$

- Calculamos $p(n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 30$:

  1,0000, 0,9973, 0,9918, 0,9836, 0,9729, 0,9595, 0,9438, 0,9257, 0,9054, 0,8830, 0,8589, 0,8330, 0,8056, 0,7769, 0,7471, 0,7164, 0,6850, 0,6531, 0,6209, 0,5886, 0,5563, 0,5243, 0,4927, 0,4617, 0,4313, 0,4018, 0,3731, 0,3455, 0,3190, 0,2937.

Tabla de contenidos

Ejemplo

- **Dos** dados **regulares** son lanzados.
- $S = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
- Sabemos que $|S| = \mathbf{36}$.
- ¿Cuál es la probabilidad que la **suma** sea 8?

Ejemplo

- **Dos** dados **regulares** son lanzados.
- $S = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
- Sabemos que $|S| = \mathbf{36}$.
- ¿Cuál es la probabilidad que la **suma** sea 8?
- La probabilidad es $5/36$.

Ejemplo

- **Dos** dados **regulares** son lanzados.
- $S = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
- Sabemos que $|S| = \mathbf{36}$.
- ¿Cuál es la probabilidad que la **suma** sea 8?
- La probabilidad es $5/36$.
- Suponemos ahora que conocemos el resultado de **uno de los dados**, por ejemplo, el primer dado es 3.
- ¿Cuál es la probabilidad que la suma sea 8 ?

Ejemplo

- **Dos** dados **regulares** son lanzados.
- $S = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
- Sabemos que $|S| = \mathbf{36}$.
- ¿Cuál es la probabilidad que la **suma** sea 8?
- La probabilidad es $5/36$.
- Suponemos ahora que conocemos el resultado de **uno de los dados**, por ejemplo, el primer dado es 3.
- ¿Cuál es la probabilidad que la suma sea 8 ?
- El secondo dado debe ser 5. Entonces, la probabilidad es $1/6$.

Definición

Definición

Sean $E, F \subseteq S$ dos eventos. La ***probabilidad condicional de E dado que ocurrió F*** *se define por*

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

(asumiendo que $P(F) > 0$).

Interpretación

Dado que ocurre F, el conjunto F se puede ver con un **«nuevo» espacio muestral** y entonces $E \cap F$ es el **«nuevo» evento**.

Ejemplos (1/2)

- En una fábrica, se prueban algunos componentes en una caja de 40 **componentes**.
- Hay
  - 5 componentes **defectuosos** (se da cuenta de inmediato),
  - 10 componentes son **parcialmente defectuosos** (necesitan algunas horas de prueba) y
  - 25 son **aceptables**.
- Un componente se elige al azar.
- Si es initialmente functional, ¿cuál es la probabilidad que sea **aceptable**?

Ejemplos (2/2)

- Sean los **eventos** siguientes:
  - A : el componente es aceptable;
  - D : el componente es defectuoso;
  - P : el componente es parcialmente defectuoso.

Ejemplos (2/2)

- Sean los **eventos** siguientes:
  - A : el componente es aceptable;
  - D : el componente es defectuoso;
  - P : el componente es parcialmente defectuoso.
- Buscamos $P(A|\overline{D})$.

Ejemplos (2/2)

- Sean los **eventos** siguientes:
  - A : el componente es aceptable;
  - D : el componente es defectuoso;
  - P : el componente es parcialmente defectuoso.
- Buscamos $P(A|\overline{D})$.
- Por definición de probabilidad condicional

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)}{1 - P(D)} = \frac{25/40}{1 - 5/40}.$$

Nota: $A \cap \overline{D} = A \cap (A \cup P) = A$ (porque $A \subseteq A \cup P$).

Ejemplos (2/2)

- Sean los **eventos** siguientes:
  - A : el componente es aceptable;
  - D : el componente es defectuoso;
  - P : el componente es parcialmente defectuoso.
- Buscamos $P(A|\overline{D})$.
- Por definición de probabilidad condicional

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)}{1 - P(D)} = \frac{25/40}{1 - 5/40}.$$

Nota: $A \cap \overline{D} = A \cap (A \cup P) = A$ (porque $A \subseteq A \cup P$).

- Entonces

$$P(A|\overline{D}) = \frac{25}{35} = \mathbf{\frac{5}{7}}.$$

La paradoja de los dos niños

- Bob tiene **dos niños**.
- Sabemos que al menos uno de los dos es un **chico**.
- ¿Cuál es la probabilidad que **ambos** niños sean **chicos**?

La paradoja de los dos niños

- Bob tiene **dos niños**.
- Sabemos que al menos uno de los dos es un **chico**.
- ¿Cuál es la probabilidad que **ambos** niños sean **chicos**?
- Sean los eventos
  - A : «Al menos uno de los dos niños es un chico» y
  - B : «Los dos niños son chicos».

La paradoja de los dos niños

- Bob tiene **dos niños**.
- Sabemos que al menos uno de los dos es un **chico**.
- ¿Cuál es la probabilidad que **ambos** niños sean **chicos**?
- Sean los eventos
  - A : «Al menos uno de los dos niños es un chico» y
  - B : «Los dos niños son chicos».
- Buscamos $P(B|A)$.
- Entonces,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{(M,M)\})}{P(\{(M,M),(M,F),(F,M)\})} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

Intersección de eventos

- Una otra **relación importante** es
$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E|F).$$
- Alicia tiene $30\,\%$ de probabilidad que su empresa inicie una sucursal en Bogotá. Si es el caso, hay une probabilidad de $60\,\%$ que sea la directora.
- ¿Cuál es la probabilidad que Alicia sea directora de una sucursal en Bogotá?

Intersección de eventos

- Una otra **relación importante** es
$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E|F).$$
- Alicia tiene 30 % de probabilidad que su empresa inicie una sucursal en Bogotá. Si es el caso, hay une probabilidad de 60 % que sea la directora.
- ¿Cuál es la probabilidad que Alicia sea directora de una sucursal en Bogotá?
- Sean los eventos
  - B : «Una sucursal inicia en Chicago.» y
  - D : «Alicia es directora de una sucursal en Chicago»

Intersección de eventos

- Una otra **relación importante** es
$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E|F).$$
- Alicia tiene 30 % de probabilidad que su empresa inicie una sucursal en Bogotá. Si es el caso, hay une probabilidad de 60 % que sea la directora.
- ¿Cuál es la probabilidad que Alicia sea directora de una sucursal en Bogotá?
- Sean los eventos
  - B : «Una sucursal inicia en Chicago.» y
  - D : «Alicia es directora de una sucursal en Chicago»
- Entonces
$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D|B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = \mathbf{0{,}18}.$$

- Una compañia de seguros divide sus clientes en dos categorías: (1) **en riesgo** de tener un accidente y (2) **no** en situación de **riesgo**.
- Considera que hay una probabilidad de $0{,}4$ que los clientes de la categoría (1) tengan un accidente en el proximo año y estos de la categoría (2) tengan una probabilidad de $0{,}2$.
- Asumiendo que $30\,\%$ de la populación es en la categoría (1), ¿cuál es la probabilidad que un **nuevo cliente** tenga un accidente en **el proximo año**?

Ejemplos (2/6)

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.

Ejemplos (2/6)

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.
- Sean los eventos
  - A : «El cliente tendrá un **accidente** el año proximo» y
  - R : «El cliente es en situación de **riesgo**».

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.
- Sean los eventos
  - A : «El cliente tendrá un **accidente** el año proximo» y
  - R : «El cliente es en situación de **riesgo**».
- Tenemos la relación

$$A = (A \cap R) \cup (A \cap \overline{R}),$$

donde $A \cap R$ y $A \cap \overline{R}$ son **disjuntos**.

Ejemplos (2/6)

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.
- Sean los eventos
  - A : «El cliente tendrá un **accidente** el año proximo» y
  - R : «El cliente es en situación de **riesgo**».
- Tenemos la relación
$$A = (A \cap R) \cup (A \cap \overline{R}),$$
donde $A \cap R$ y $A \cap \overline{R}$ son **disjuntos**.
- Entonces la probabilidad buscada es
$$P(A) \quad = \quad P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R})$$

Ejemplos (2/6)

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.
- Sean los eventos
  - A : «El cliente tendrá un **accidente** el año proximo» y
  - R : «El cliente es en situación de **riesgo**».
- Tenemos la relación

$$A = (A \cap R) \cup (A \cap \overline{R}),$$

donde $A \cap R$ y $A \cap \overline{R}$ son **disjuntos**.

- Entonces la probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) \\ &= P(A|R)P(R) + P(A|\overline{R})P(\overline{R}) \end{aligned}$$

Ejemplos (2/6)

- La idea clave es de **suponer primero** que el nuevo cliente es en riesgo y **entonces** que **no** es en situación de **riesgo**.
- Sean los eventos
  - A : «El cliente tendrá un **accidente** el año proximo» y
  - R : «El cliente es en situación de **riesgo**».
- Tenemos la relación

$$A = (A \cap R) \cup (A \cap \overline{R}),$$

donde $A \cap R$ y $A \cap \overline{R}$ son **disjuntos**.

- Entonces la probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) \\ &= P(A|R)P(R) + P(A|\overline{R})P(\overline{R}) \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}26}. \end{aligned}$$

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.
- Buscamos $P(R|A)$.

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.
- Buscamos $P(R|A)$.
- Entonces

$$P(R|A) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)}$$

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.
- Buscamos $P(R|A)$.
- Entonces

$$\begin{aligned} P(R|A) &= \frac{P(A \cap R)}{P(A)} \\ &= \frac{P(R)P(A|R)}{P(A)} \end{aligned}$$

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.
- Buscamos $P(R|A)$.
- Entonces

$$\begin{aligned} P(R|A) &= \frac{P(A \cap R)}{P(A)} \\ &= \frac{P(R)P(A|R)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}26} \end{aligned}$$

Ejemplos (3/6)

- Suponemos ahora que el cliente **tiene un accidente**.
- ¿Cuál es la probabilidad que sea en **situación de riesgo**?
- Sabemos que $P(A) = 0{,}26$, $P(R) = 0{,}3$ et $P(A|R) = 0{,}4$.
- Buscamos $P(R|A)$.
- Entonces

$$\begin{aligned} P(R|A) &= \frac{P(A \cap R)}{P(A)} \\ &= \frac{P(R)P(A|R)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}26} \\ &= 6/13. \end{aligned}$$

Ejemplos (4/6)

- Un estudiante toma un examen de **opción múltiple**.
- Para una pregunta determinada, sean
  - p la probabilidad que **conoce** la respuesta;
  - $1 - p$ la probabilidad que **intenta de adivinar**;
  - En este último caso, la probabilidad que obtiene la respuesta correcta es $1/m$, donde m es el **número de opciones posibles**.
- Si el estudiante tiene la respuesta correcta, ¿cuál es la probabilidad que conoce la respuesta?

Ejemplos (5/6)

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.

Ejemplos (5/6)

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.
- También sabemos que

$$P(S) =$$

Ejemplos (5/6)

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.
- También sabemos que

$$
\begin{aligned}
P(S) &= p \\
P(C|S) &=
\end{aligned}
$$

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.
- También sabemos que

$$
\begin{aligned}
P(S) &= p \\
P(C|S) &= 1 \\
P(C|\overline{S}) &=
\end{aligned}
$$

Ejemplos (5/6)

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.
- También sabemos que

$$\begin{aligned} P(S) &= p \\ P(C|S) &= 1 \\ P(C|\overline{S}) &= 1/m \\ P(\overline{S}) &= \end{aligned}$$

Ejemplos (5/6)

- Sean los eventos siguientes
  - C : «El estudiante contesta **correctamente**» y
  - S : «El estudiante **sabe** la respuesta».
- Buscamos $P(S|C)$.
- También sabemos que

$$\begin{array}{rcl} P(S) & = & p \\ P(C|S) & = & 1 \\ P(C|\overline{S}) & = & 1/m \\ P(\overline{S}) & = & 1-p \end{array}$$

Ejemplos (6/6)

- Por **definición** de probabilidad condicional,

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)}.$$

Ejemplos (6/6)

- Por **definición** de probabilidad condicional,

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)}.$$

- Entonces,

$$P(S \cap C) \quad = \quad P(S)P(C|S) = p \cdot 1 = p$$

Ejemplos (6/6)

- Por **definición** de probabilidad condicional,

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)}.$$

- Entonces,

$$\begin{aligned} P(S \cap C) &= P(S)P(C|S) = p \cdot 1 = p \\ P(C) &= P(C|S)P(S) + P(C|\overline{S})P(\overline{S}) \\ &= p + \frac{1}{m}(1-p). \end{aligned}$$

Ejemplos (6/6)

- Por **definición** de probabilidad condicional,

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)}.$$

- Entonces,

$$\begin{aligned} P(S \cap C) &= P(S)P(C|S) = p \cdot 1 = p \\ P(C) &= P(C|S)P(S) + P(C|\overline{S})P(\overline{S}) \\ &= p + \frac{1}{m}(1-p). \end{aligned}$$

- Obtenemos

$$P(S|C) = \frac{p}{p + (1-p)/m} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}.$$

Ejemplos (6/6)

- Por **definición** de probabilidad condicional,

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)}.$$

- Entonces,

$$\begin{aligned} P(S \cap C) &= P(S)P(C|S) = p \cdot 1 = p \\ P(C) &= P(C|S)P(S) + P(C|\overline{S})P(\overline{S}) \\ &= p + \frac{1}{m}(1-p). \end{aligned}$$

- Obtenemos

$$P(S|C) = \frac{p}{p + (1-p)/m} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}.$$

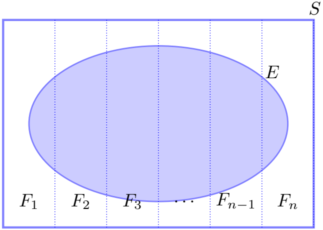
- Por ejemplo, si $m = 5$ y $p = 1/2$, entonces $P(S|C) = \mathbf{5/6}$.

Particiones y probabilidad condicional

Teorema

Suponemos que F_1, F_2, …, F_n son eventos ***disjuntos dos a dos*** *y que $\bigcup_{i=1}^n F_i = S$, es decir que* ***exactemente uno*** *de los eventos F_1, F_2, …, F_n ocurre. Entonces*

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i).$$



Fórmula de Bayes (1/2)

Teorema (Fórmula de Bayes)

Sean A y B dos eventos. Entonces

$$P(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{B}|\mathbf{A})P(A)}{P(B)}.$$

Demostración

Sigue de la seconda igualdad:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

De hecho, observamos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Teorema (Fórmula generalizada de Bayes)

Suponemos que F_1, F_2, ..., F_n son eventos ***disjuntos dos a dos*** *y que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S,$$

es decir que ***exactamente uno evento*** *de F_1, F_2, ..., F_n ocurre.*
Entonces

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}.$$

Ejemplo (1/2)

- Un laboratorio proporciona una **prueba** para la detección de una **enfermedad**.
- Sabemos que si un paciente **tiene la enfermedad**, la prueba lo detecta en 99 % de los casos.
- Pero si alguién está **sano**, en 1 % de los casos, el resultado es un **falso positivo**.
- Suponemos que la enfermedad afecta 0,5 % de la población.
- ¿Cuál es la probabilidad que alguien sea **afectada** dado que el resultado es **positivo**?

Ejempo (2/2)

- Sean los eventos siguientes:
  - A : «La persona es **afectada**» y
  - R : «El **resultado** es positivo».

Ejempo (2/2)

- Sean los eventos siguientes:
  - A : «La persona es **afectada**» y
  - R : «El **resultado** es positivo».
- Buscamos $P(A|R)$.

Ejempo (2/2)

- Sean los eventos siguientes:
  - A : «La persona es **afectada**» y
  - R : «El **resultado** es positivo».
- Buscamos $P(A|R)$.
- Por la fórmula de Bayes generalizada, tenemos

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|\overline{A})P(\overline{A})}$$

Ejempo (2/2)

- Sean los eventos siguientes:
  - A : «La persona es **afectada**» y
  - R : «El **resultado** es positivo».
- Buscamos $P(A|R)$.
- Por la fórmula de Bayes generalizada, tenemos

$$
\begin{aligned}
P(A|R) &= \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|\overline{A})P(\overline{A})} \\
&= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}005}{0{,}99 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}995}
\end{aligned}
$$

Ejempo (2/2)

- Sean los eventos siguientes:
  - A : «La persona es **afectada**» y
  - R : «El **resultado** es positivo».
- Buscamos $P(A|R)$.
- Por la fórmula de Bayes generalizada, tenemos

$$
\begin{aligned}
P(A|R) &= \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|\overline{A})P(\overline{A})} \\
&= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}005}{0{,}99 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}995} \\
&= 0{,}3322.
\end{aligned}
$$

- Entonces, solamente $33\,\%$ de los pacientes son **afectados** de hecho.

La paradoja de Monty Hall

- Es una paradoja muy **famosa**.
- Serie **Numb3rs**:
  `https://www.youtube.com/watch?v=P9WFKmLK0dc`
- Se prueba con la **fórmula generalizada de Bayes**.

Tabla de contenidos

Definición

- Sean E y F dos eventos.
- Intuitivamente, E y F son **independiente** si el hecho de **conocer F no cambia** la probabilidad que E ocurre.
- Se traduce por $P(E|F) = P(E)$.
- Entonces, como $P(E|F) = P(E \cap F)/P(F)$, se deduce

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

Definición

Sean E y F dos eventos. Dicemos que E y F son ***independientes*** *si*

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Si no, dicemos que E y F son ***dependientes****.*

Ejemplos (1/2)

- Elegimos al azar una carta de una baraja de 52 **cartas**.
- A : «La carta es un as» y
- C : «La carte es de espadas».
- Claramente, $P(A) = 1/13$, $P(C) = 1/4$ y $P(A \cap C) = 1/52$, entonces los eventos son **independientes**.

Ejemplos (2/2)

Un otro ejemplo

- R : «El proximo presidente de los Estados Unidos será republicano».
- T : «Habrá un terremoto durante el proximo año».
- C : «Habrá una recesión económica durante los dos proximos años».

Ejemplos (2/2)

Un otro ejemplo

- R : «El proximo presidente de los Estados Unidos será republicano».
- T : «Habrá un terremoto durante el proximo año».
- C : «Habrá una recesión económica durante los dos proximos años».
- Es **razonable** suponer que R y T son **independientes**.

Ejemplos (2/2)

Un otro ejemplo

- R : «El proximo presidente de los Estados Unidos será republicano».
- T : «Habrá un terremoto durante el proximo año».
- C : «Habrá una recesión económica durante los dos proximos años».
- Es **razonable** suponer que R y T son **independientes**.
- Pero no parece **razonable** que R y C son independientes.

Independencia de más de dos eventos

Definición

Sean E, F y G tres eventos. Dicemos que E, F y G son ***independientes*** *si*

$$\begin{aligned} P(E \cap F \cap G) &= P(E)P(F)P(G) \\ P(E \cap F) &= P(E)P(F) \\ P(E \cap G) &= P(E)P(G) \\ P(F \cap G) &= P(F)P(G). \end{aligned}$$

Ejemplo

- Las **cuatro igualidades** son esentiales.
- **Dos dados** son lanzados.

Ejemplo

- Las **cuatro igualidades** son esentiales.
- **Dos dados** son lanzados.
- Sean los eventos siguientes
  - S : «La suma es 7»;
  - T : «El primer dado es 3» y
  - Q : «El secondo dado es 4».

Ejemplo

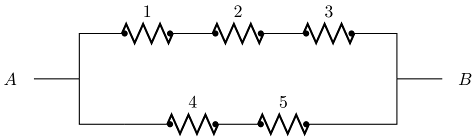
- Las **cuatro igualidades** son esentiales.
- **Dos dados** son lanzados.
- Sean los eventos siguientes
  - S : «La suma es 7»;
  - T : «El primer dado es 3» y
  - Q : «El secondo dado es 4».
- Claramente, $S \cap T$, $S \cap Q$ y $T \cap Q$ son **independientes**.

Ejemplo

- Las **cuatro igualidades** son esentiales.
- **Dos dados** son lanzados.
- Sean los eventos siguientes
  - S : «La suma es 7»;
  - T : «El primer dado es 3» y
  - Q : «El secondo dado es 4».
- Claramente, $S \cap T$, $S \cap Q$ y $T \cap Q$ son **independientes**.
- Pero $P(S \cap T \cap Q) = 1/36$, mientras que

$$P(S)P(T)P(Q) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{216}} \neq \mathbf{\frac{1}{36}}.$$

- Sea el circuito siguiente



- Suponemos que el componente i funciona con probabilidad p_i.
- ¿Cuál es la probabilidad la **corriente pasa** entre A y B asumiendo que las probabilidades p_i son independientes?

Circuitos eléctricos (2/2)

- Sean
  - F_i : «El componente i funciona», para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
  - S : «La corriente fluye a través la parte superior» y
  - I : «La corriente fluye a través la parte inferior».

Circuitos eléctricos (2/2)

- Sean
  - F_i : «El componente i funciona», para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
  - S : «La corriente fluye a través la parte superior» y
  - I : «La corriente fluye a través la parte inferior».
- Calculamos la probabilidad que la corriente **no fluye**, es decir la probabilidad $P(\overline{S} \cap \overline{I})$.

Circuitos eléctricos (2/2)

- Sean
  - F_i : «El componente i funciona», para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
  - S : «La corriente fluye a través la parte superior» y
  - I : «La corriente fluye a través la parte inferior».
- Calculamos la probabilidad que la corriente **no fluye**, es decir la probabilidad $P(\overline{S} \cap \overline{I})$.
- Como $\overline{S}$ et $\overline{I}$ son **independientes**, $P(\overline{S} \cap \overline{I}) = P(\overline{S})P(\overline{I})$.

Circuitos eléctricos (2/2)

- Sean
  - F_i : «El componente i funciona», para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
  - S : «La corriente fluye a través la parte superior» y
  - I : «La corriente fluye a través la parte inferior».
- Calculamos la probabilidad que la corriente **no fluye**, es decir la probabilidad $P(\overline{S} \cap \overline{I})$.
- Como $\overline{S}$ et $\overline{I}$ son **independientes**, $P(\overline{S} \cap \overline{I}) = P(\overline{S})P(\overline{I})$.
- Los valores p_i **son independientes** también, entonces $P(S) = p_1 p_2 p_3$ y $P(I) = p_4 p_5$.

Circuitos eléctricos (2/2)

- Sean
  - F_i : «El componente i funciona», para $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
  - S : «La corriente fluye a través la parte superior» y
  - I : «La corriente fluye a través la parte inferior».
- Calculamos la probabilidad que la corriente **no fluye**, es decir la probabilidad $P(\overline{S} \cap \overline{I})$.
- Como $\overline{S}$ et $\overline{I}$ son **independientes**, $P(\overline{S} \cap \overline{I}) = P(\overline{S})P(\overline{I})$.
- Los valores p_i **son independientes** también, entonces $P(S) = p_1 p_2 p_3$ y $P(I) = p_4 p_5$.
- Consecuentemente, la probabilidad buscada es $1 - P(\overline{S} \cap \overline{I}) = 1 - P(\overline{S})P(\overline{I}) = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5)$.