

Cap. 7 : Pruebas de hipótesis

Alexandre Blondin Massé

Departamento de Informática y Matemática
Université du Québec à Chicoutimi

20 de junio del 2015

Modelado de sistemas aleatorios
Ingeniería de sistemas, producción y ambiental

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

- ▶ Hemos visto como **estimar parámetros** de manera **puntual** y con **intervalos**;
- ▶ Aquí, nos interesamos a **probar** si una **hipótesis** a cerca de una muestra **parece razonable** o no;
- ▶ Por ejemplo, se lanza un dado **100** veces y se notan los resultados :

Resultados	1	2	3	4	5	6
Números	7	18	26	15	18	16

- ▶ ¿Es el **dado trucado**?
- ▶ Para contestar se utiliza una **prueba χ^2 de Pearson**.

- ▶ La hipótesis que queremos verificar se llama **hipótesis nula**, denotada por H_0 ;
- ▶ En varios casos, la hipótesis nula será de la forma siguiente:

$$\theta = \theta_0, \quad \theta \leq \theta_0 \quad \text{y} \quad \theta \geq \theta_0,$$

donde θ es un parámetro **desconocido** y θ_0 es un valor que deseamos verificar si es **coherente con la muestra**;

- ▶ Cuando la muestra es **coherente** con la hipótesis nula, decimos que la hipótesis se **acepta**;
- ▶ De otra manera, decimos que se **rechaza**.

Aceptación y rechazo

- ▶ Hay que tener **cuidado** con la terminología;
- ▶ «**Aceptar** una hipótesis» no significa que es **verdadera**, pero que no es **incoherente** con los datos de la muestra;
- ▶ «**Rechazar** una hipótesis» significa que los datos **parecen** incompatibles con esta **hipótesis**;
- ▶ Suponemos que deseamos probar la hipótesis $H_0 : \theta < 1$ para una población normal con una muestra de tamaño 10 con media 1,25;
- ▶ En varios casos, H_0 se **acepta** porque no tenemos **razones suficientes** para rechazar la hipótesis.
- ▶ Pero si la media es 3,1, parece muy improbable que la hipótesis $\theta < 1$ sea razonable y entonces se **rechaza**.

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Hipótesis simples y compuestas

- ▶ Sea una población de **distribution** F_θ , donde θ es el único parámetro **desconocido** de F ;
- ▶ Deseamos formular una **hipótesis** H_0 cerca de θ ;
- ▶ Por ejemplo, $H_0 : \theta = 1$ o $H_0 : \theta \leq 1$;
- ▶ En el caso $\theta = 1$, si la hipótesis se **acepta**, entonces podemos **describir completamente** la distribución: decimos que la hipótesis es **simple**;
- ▶ En el caso $\theta \leq 1$, no podemos describir **completamente** la distribución: decimos que la hipótesis es **compuesta**.

- ▶ Cualquiera hipótesis H_0 cerca de un **parámetro** θ induce una zona C de \mathbb{R}^n de tal manera que
- ▶ La hipótesis se **acepta** si $(X_1, X_2, \dots, X_n) \notin C$;
- ▶ La hipótesis se **rechaza** si $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C$;
- ▶ Por ejemplo, una prueba posible para una **población normal de varianza 1** es que su media $\theta = 1$ y induce la **zona crítica**

$$C = \left\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) : \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - 1 \right| > \frac{1,96}{\sqrt{n}} \right\}.$$

- ▶ De hecho, es el **complemento** del intervalo de confianza para $\alpha = 0,95$.

Típos de errores

- ▶ Cuando se hace una **prueba de hipótesis**, algunos errores se **pueden encontrar**;
- ▶ Por ejemplo, es posible de **rechazar H_0** mientras que la hipótesis es de hecho correcta: es un **error de tipo I**;
- ▶ De lo contrario, si se **acepta H_0** mientras que no es correcta, cometemos un **error de tipo II**;
- ▶ Después de eso, intentaremos calcular las **probabilidades** cometer errores de **típo I o II**;
- ▶ La idea es de fijar un **límite máximo α** , que se llama **nivel de significado** para un error de tipo I;
- ▶ Se **elige** un valor para α (en general 0,1, 0,05 o 0,005) y se construye una prueba garantizando que la probabilidad de un error de tipo I no puede ser **mayor que α** .

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Los varios casos

Como en el capítulo precedente, la **prueba** depende del **conocimiento** de los parámetros:

- ▶ Prueba de la **media** cuando
 - ▶ la varianza es **conocida**;
 - ▶ la varianza es **desconocida**;
- ▶ Prueba de la **igualdad de las medias** de dos poblaciones normales cuando
 - ▶ las varianzas son **conocidas**;
 - ▶ las varianzas son **desconocidas** y **iguales**;
 - ▶ las varianzas son **desconocidas** y **diferentes**;
- ▶ Prueba de la **varianza**.

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Varianza conocida (1/3)

- ▶ Sea una muestra X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño n de una población normal de **media desconocida** μ y de **varianza conocida** σ^2 ;

- ▶ Deseamos probar la **hipótesis nula**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

con respecto a la **hipótesis alternativa**

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

- ▶ Parece razonable aceptar H_0 si \bar{X} esta **bastante cerca** de μ_0 ;
- ▶ La **zona crítica** es de la forma

$$C = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) : |\bar{X} - \mu_0| > c\},$$

donde c es un valor **bien elegido**.

Varianza conocida (2/3)

- ▶ Suponemos que deseamos un **nivel de significado** α , para obtener un error **de tipo I** menor o igual a α .
- ▶ Buscamos c que satisfice

$$P\left(|\bar{X} - \mu_0| > c\right) = \alpha.$$

- ▶ Pero sabemos que la variable

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es **normal estándar**.

- ▶ Entonces obtenemos

$$P\left(|Z| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

- ▶ Entonces

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- ▶ Así, se **rechaza** H_0 si

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| > z_{\alpha/2};$$

- ▶ Y se **acepta** H_0 si

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| \leq z_{\alpha/2}.$$

Ejemplo (1/2)

- ▶ Un señal μ se envía del punto A al punto B ;
- ▶ El valor recibido en B sigue una distribución normal de **media μ** y de **desviación estándar 2**.
- ▶ La persona que recibe el señal tiene una buena razón creer que $\mu = 8$.
- ▶ Prueben esta hipótesis si el señal se envía **5 veces** y que la media muestral es **9,5**.

Ejemplo (2/2)

► Notamos que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1,5 \approx \mathbf{1,68}.$$

Ejemplo (2/2)

- ▶ Notamos que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1,5 \approx \mathbf{1,68}.$$

- ▶ Valores posibles para **diferentes niveles** de significado son:

$$z_{0,1/2} \approx 1,645, \quad z_{0,05/2} \approx 1,96 \quad \text{y} \quad z_{0,005/2} = 2,81.$$

Ejemplo (2/2)

- ▶ Notamos que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1,5 \approx \mathbf{1,68}.$$

- ▶ Valores posibles para **diferentes niveles** de significado son:

$$z_{0,1/2} \approx 1,645, \quad z_{0,05/2} \approx 1,96 \quad \text{y} \quad z_{0,005/2} = 2,81.$$

- ▶ Entonces, se **rechaza** la hipótesis si $\alpha = 0,1$, pero se **acepta** si $\alpha = 0,05$ ou $\alpha = 0,005$.

- ▶ En general, se **acepta** o se **rechaza** la hipótesis según el valor de α ;
- ▶ El **valor p** (en inglés **p -value**) es el valor **crítico** donde **pasamos** de la aceptación al rechazo;
- ▶ Entonces, probamos una hipótesis y calculamos su **valor p** ;
- ▶ Pues, decidimos **aceptar** o no, según el contexto;
- ▶ Cuando p es grande, se **acepta la hipótesis**;
- ▶ De lo contrario, si p es pequeño, se **rechaza**;
- ▶ Los niveles los mas frecuentes son **0,01, 0,05 y 0,1**.

Ejemplo

- ▶ En el ejemplo precedente, suponemos ahora que los 5 valores enviados tienen una media de $\bar{X} = 8,5$;
- ▶ Creemos que el verdadero valor es $\mu = 8$;
- ▶ Entonces

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,559.$$

- ▶ Luego, el **valor p** es

$$P(|Z| > 0,559) = 2P(Z > 0,559) = 2 \times 0,288 = \mathbf{0,576}.$$

- ▶ Porque nos deseamos probar una hipótesis con un nivel mayor que **0,576**, se **acepta H_0** ;
- ▶ Si la media muestra era $\bar{X} = 11,5$, entonces el **p valor** sería 0,00005, y entonces **rechazaríamos H_0** .

Error de tipo II (1/2)

- ▶ Hasta ahora, hemos estudiado solamente **errores de tipo I**;
- ▶ ¿Qué pasa con **errores de tipo II**, es decir la probabilidad de **aceptar incorrectamente** la hipótesis?
- ▶ Claramente, la probabilidad **depende de μ** ;
- ▶ Entonces, se define

$$\beta(\mu) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right) = P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right),$$

la **función de eficacia** que represente la probabilidad de **aceptar H_0** mientras que la media es μ .

- ▶ Pero sabemos que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- ▶ Entonces

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} - \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)\end{aligned}$$

Ejemplo (1/2)

- ▶ En el ejemplo del señal, sea $H_0 : \mu = 8$;
- ▶ Suponemos que el valor **verdadero** es 10;
- ▶ Luego

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = -\sqrt{5}.$$

- ▶ Si $\alpha = 0,05$, entonces $z_{0,025} = 1,96$ y obtenemos

$$P\left(Z \leq -\sqrt{5} + 1,96\right) - P\left(Z \leq -\sqrt{5} - 1,96\right) = \mathbf{0,392}.$$

- ▶ Así, la probabilidad de **aceptar** H_0 mientras que es falsa es cerca de 0,392.

Definición

La función $1 - \beta(\mu)$ se llama **poder estadístico** de la prueba. Es la probabilidad que se rechaza H_0 mientras que μ es el **valor verdadero**;

Nota

El poder estadístico se utiliza **a veces** para calcular el **tamaño minimal** de la muestra para que el error de tipo II sea **minimal**;

- ▶ Más precisamente, sea β la probabilidad de **aceptar** H_0 mientras que la **media verdadera** es μ_1 .

- ▶ Más precisamente, sea β la probabilidad de **aceptar** H_0 mientras que la **media verdadera** es μ_1 .
- ▶ Se aproxima β por

$$\beta \approx P \left(Z \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2} \right).$$

- ▶ Más precisamente, sea β la probabilidad de **aceptar** H_0 mientras que la **media verdadera** es μ_1 .
- ▶ Se aproxima β por

$$\beta \approx P\left(Z \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right).$$

- ▶ Entonces

$$-z_{\beta} \approx (\mu_0 - \mu_1) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} + z_{\alpha/2}.$$

- ▶ Más precisamente, sea β la probabilidad de **aceptar** H_0 mientras que la **media verdadera** es μ_1 .
- ▶ Se aproxima β por

$$\beta \approx P\left(Z \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right).$$

- ▶ Entonces

$$-z_\beta \approx (\mu_0 - \mu_1) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} + z_{\alpha/2}.$$

- ▶ Luego

$$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}.$$

Ejemplo

- ▶ Siempre el mismo ejemplo del **señal**;
- ▶ Sea la hipótesis $H_0 : \mu = 8$;
- ▶ Suponemos que el **nivel de significado** es $\alpha = 0,05$;
- ▶ ¿Cuál es el tamaño de la muestra necesario para tener una probabilidad mayor que **75 % rechazar** H_0 si $\mu = 9,2$?
- ▶ En este caso, tenemos $\beta = 0,25$ y, como $z_{\alpha/2} \approx 1,96$, $z_{\beta} \approx 0,65$, obtenemos

$$n \approx \frac{(1,96 + 0,67)^2 \cdot 4}{(1,2)^2} \approx 19,21.$$

- ▶ Significa que un tamaño de $n = 20$ es suficiente.
- ▶ **Nota:** $\beta(9,2) \approx 0,235$, entonces si $n = 20$, hay **76,5 %** que la hipótesis $\mu = 8$ se rechaza mientras que la media es **9,2**.

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Prueba de t (1/2)

- ▶ Ahora deseamos probar la **media** cuando la **varianza es desconocida**;
- ▶ Las hipótesis son

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{y} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

- ▶ Como no conocemos σ , se **estima** con la **varianza muestral**

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}.$$

- ▶ Se **rechaza** H_0 si

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right|$$

es **bastante grande**.

- ▶ Sabemos de los capítulos precedentes que

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S}$$

sigue una **distribución de Student** con $n - 1$ **grados de libertad** cuando $\mu = \mu_0$.

- ▶ Consecuamente, se propone la prueba siguiente
 - ▶ Se **acepta** H_0 si

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| \leq t_{\alpha/2, n-1},$$

- ▶ Se **rechaza** H_0 si

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| > t_{\alpha/2, n-1}.$$

Ejemplo (1/2)

- ▶ En una clínica, se estudia el **nivel colesterol de 220 o más**;
- ▶ Se prueba una nueva medicación **reducir** sobre 50 voluntarios;
- ▶ Suponemos que la **reducción promedio es de 14,8** con **desviación estándar 6,4**;
- ▶ ¿Qué conclusión se puede sacar?

Ejemplo (1/2)

- ▶ En una clínica, se estudia el **nivel colesterol de 220 o más**;
- ▶ Se prueba una nueva medicación **reducir** sobre 50 voluntarios;
- ▶ Suponemos que la **reducción promedio es de 14,8** con **desviación estándar 6,4**;
- ▶ ¿Qué conclusión se puede sacar?
- ▶ Primero, tenemos

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{y} \quad H_1 : \mu \neq 0.$$

Ejemplo (1/2)

- ▶ En una clínica, se estudia el **nivel colesterol de 220 o más**;
- ▶ Se prueba una nueva medicación **reducir** sobre 50 voluntarios;
- ▶ Suponemos que la **reducción promedio es de 14,8** con **desviación estándar 6,4**;
- ▶ ¿Qué conclusión se puede sacar?
- ▶ Primero, tenemos

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{y} \quad H_1 : \mu \neq 0.$$

- ▶ La **estadística de prueba** es

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} = \frac{14,8\sqrt{50}}{6,4} \approx 16,352.$$

Ejemplo (2/2)

- ▶ Consecuamente, se **rechaza** la hipótesis nula;
- ▶ Pero no significa que los cambios se **explican** por la **medicación**;
- ▶ Otras posibilidades:
 - ▶ Efecto **placebo**;
 - ▶ La **temperatura** durante la prueba, etc.
- ▶ Es importante evitar lo más posible las **otras causas potenciales**;
- ▶ Por ejemplo, es una buena idea separar en **dos grupos**, uno con la **medicación** y el otro con **placebo**.

Otro ejemplo (1/2)

- ▶ Una compañía que **vende neumáticos** dice que la **vida promedio** de sus neumáticos es 40K kilometros;
- ▶ Para verificar, se prueba una muestra de 12 neumáticos:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vida	36.1	40.2	33.8	38.5	42	35.8	37	41	36.8	37.2	33	36

- ▶ ¿Qué podemos **concluir**?
- ▶ Las **hipótesis** son

$$H_0 : \mu \geq 40\ 000 \quad \text{y} \quad H_1 : \mu < 40\ 000.$$

- ▶ También

$$\bar{X} = 37,2833 \quad \text{y} \quad S = 2,7319.$$

Otro ejemplo (2/2)

- ▶ En este caso, la estadística es

$$T = \frac{\sqrt{12}(37,2833 - 40)}{2,7319} = -\mathbf{3,4448}.$$

- ▶ Como la cantidad es **menor** que $-t_{0,05,11} = -1,796$, entonces H_0 se rechaza con $\alpha = 0,05$;
- ▶ De hecho, el **valor p** es este caso es

$$P(T_{11} < -3,4448) = P(T_{11} > 3,4448) \approx 0,0028.$$

- ▶ Entonces, la hipótesis se **rechaza** para cualquiera $\alpha \geq 0,003$.

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Varianzas conocidas (1/2)

- ▶ Nos interesamos a las pruebas de hipótesis que verifican si dos poblaciones normales tienen la **misma media**;
- ▶ Sean $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $(Y_i)_{1 \leq i \leq m}$ dos muestras **independientes** de dos poblaciones normales de **medias** μ_x y μ_y y de **varianzas conocidas** σ_x^2 y σ_y^2 ;
- ▶ Entonces las hipótesis son

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad \text{y} \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y.$$

- ▶ Claramente, H_0 se **rechaza** si $|\bar{X} - \bar{Y}|$ no esta **cerca de 0**.

- ▶ Recordemos que

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right).$$

- ▶ Entonces, una **prueba razonable** es:

- ▶ Se **acepta** H_0 si

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} \leq z_{\alpha/2}.$$

- ▶ Se **rechaza** H_0 de otra manera, es decir si

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} > z_{\alpha/2}.$$

Varianzas desconocidas (1/2)

- ▶ Si las varianzas son **desconocidas**, debemos calcular las **varianzas muestrales**

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \quad \text{y} \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n - 1}.$$

- ▶ Suponemos que las varianzas son **iguales**, es decir que $\sigma^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2$;
- ▶ Recordemos que

$$S_p^2 = \frac{(n - 1)S_x^2 + (m - 1)S_y^2}{n + m - 2}$$

(se llama la **desviación estándar identificada**).

► Proponemos la **prueba de t** siguiente:

► Se **acepta** H_0 si

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{S_p^2(1/n + 1/m)}} \leq t_{\alpha/2, n+m-1}.$$

► Se **rechaza** H_0 si

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{S_p^2(1/n + 1/m)}} > t_{\alpha/2, n+m-1}.$$

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

Prueba de la varianza (1/2)

- ▶ ¿Qué pasa con la **varianza** de una población normal?
- ▶ Sea $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ una muestra de **media** μ y de **varianza** σ^2 ;
- ▶ Las **hipótesis** son

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{y} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

donde σ_0^2 es un número dado.

- ▶ Recordemos que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

sigue una distribución χ^2 con $n-1$ **grados de libertad**.

Prueba de la varianza (2/2)

- ▶ Entonces, proponemos la prueba siguiente
 - ▶ Se **acepta** H_0 si

$$\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2.$$

- ▶ Se **rechaza** H_0 de otra manera.
- ▶ La primera etapa es calcular

$$c = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

- ▶ Y se calcula el **valor** p que es

$$2 \min(P(\chi_{n-1}^2 < c), 1 - P(\chi_{n-1}^2 < c)).$$

1. Contexto

2. Nivel de confianza

3. Población normal

Media con varianza conocida

Media con varianza desconocida

Medias de dos poblaciones

Varianza de una población normal

4. Bondad de ajuste

- ▶ A veces, deseamos determinar si un **modelo probabilístico** es correcto para un **fenómeno aleatorio dado**;
- ▶ Por ejemplo, podemos pensar que el **número de accidentes industriales** que suceden cada día en una fábrica sigue una **distribución de Poisson**;
- ▶ Para **probar esta hipótesis**, se puede observar el número de accidentes que suceden dentro de **días consecutivos** y verificar si es razonable que la distribución sea **de Poisson**;
- ▶ Este tipo de prueba se llama **bondad de ajuste** (en inglés, **goodness of fit test**).

- ▶ En general, tenemos primero que **dividir** el espacio de observaciones en **zonas** o en **intervalos**;
- ▶ Entonces, se **cuenta** el número de observaciones que son en **cada zona**;
- ▶ Luego se **compara** el número de observaciones con las que tendríamos **en teoría**;
- ▶ Si la diferencia entre los **datos** y los **valores teóricos** es demasiado grande, hay que **rechazar** la hipótesis nula;
- ▶ Según que conozcamos **algunos parámetros** o **todos los parámetros** de la distribución, la prueba varia.

Parámetros todos conocidos (1/2)

- ▶ Para $i = 1, 2, \dots, n$, sea Y_i una variable aleatoria que puede ser $\{1, 2, \dots, k\}$;
- ▶ Sea p_1, p_2, \dots, p_k la probabilidad que obtengamos los valores $1, 2, \dots, k$;
- ▶ Deseamos probar si para cada $Y \in \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, la **función de probabilidad** de Y se describe con los valores p_i :

$$H_0 : P(Y = i) = p_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k;$$

- ▶ La hipótesis **alternativa** es

$$H_1 : P(Y = i) \neq p_i, \quad \text{para al menos uno } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Parámetros todos conocidos (2/2)

- ▶ Para $i = 1, 2, \dots, k$, sea X_i el número de Y_j que son iguales a i ;
- ▶ Entonces la **cantidad** $(X_i - np_i)^2$ es un **indicador** de la probabilidad que p_i sea igual a $P(Y = i)$;
- ▶ Mas precisamente, si es número es **grande**, entonces debemos **rechazar** H_0 .
- ▶ La prueba es la siguiente. Sea

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}.$$

- ▶ Entonces se **rechaza** H_0 si $T \geq \chi_{\alpha, k-1}^2$;
- ▶ Luego, el **valor** p es $P(\chi_{k-1}^2 \geq T)$.
- ▶ Esta prueba se llama **prueba de χ^2** .

- ▶ Es más **simple** utilizar la fórmula siguiente para calcular T :

$$T = \left(\sum_{i=1}^k X_i^2 / np_i \right) - n.$$

- ▶ También, esta prueba es una **aproximación**: se acepta **en general** la estimación si
 - (I) $np_i \geq 1$ para $i = 1, 2, \dots, k$;
 - (II) al menos **80 %** de los valores np_i son **mayores que 5**.

Ejemplo (1/2)

- ▶ Un contratista compra **bombillas** de una fábrica.
- ▶ Dicen que la **calidad** de las bombillas no es uniforme, pero que hay 4 categorías (A, B, C, D, E) con probabilidades respectivas 0,15, 0,25, 0,35, 0,20, 0,05.
- ▶ Sin embargo, el contratista tiene duda que hay **demasiadas** bombillas de tipo E .
- ▶ Para verificar, compra **30 bombillas** y prueba su calidad.
- ▶ Tiene **3** de tipo A , **6** de tipo B , **9** de tipo C , **7** de tipo D y **5** de type E .
- ▶ ¿Cuál es la conclusión?

Ejemplo (2/2)

- ▶ Calculamos la estadística

T

Ejemplo (2/2)

- ▶ Calculamos la estadística

$$T = \frac{3^2}{30 \times 0,15} + \frac{6^2}{30 \times 0,25} + \frac{9^2}{30 \times 0,35} + \frac{7^2}{30 \times 0,20} + \frac{5^2}{30 \times 0,05} - 30$$

Ejemplo (2/2)

- ▶ Calculamos la estadística

$$\begin{aligned}T &= \frac{3^2}{30 \times 0,15} + \frac{6^2}{30 \times 0,25} + \frac{9^2}{30 \times 0,35} + \frac{7^2}{30 \times 0,20} + \frac{5^2}{30 \times 0,05} - 30 \\&= \frac{9}{4,5} + \frac{36}{7,5} + \frac{81}{10,5} + \frac{49}{6} + \frac{25}{1,5} - 30 \\&\approx 9,3476.\end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- ▶ Calculamos la estadística

$$\begin{aligned}T &= \frac{3^2}{30 \times 0,15} + \frac{6^2}{30 \times 0,25} + \frac{9^2}{30 \times 0,35} + \frac{7^2}{30 \times 0,20} + \frac{5^2}{30 \times 0,05} - 30 \\&= \frac{9}{4,5} + \frac{36}{7,5} + \frac{81}{10,5} + \frac{49}{6} + \frac{25}{1,5} - 30 \\&\approx 9,3476.\end{aligned}$$

- ▶ El valor p es $P(T \geq 9,3476) \approx P(\chi_4^2 \geq 9,348) \approx 0,053$.

Ejemplo (2/2)

- ▶ Calculamos la estadística

$$\begin{aligned}T &= \frac{3^2}{30 \times 0,15} + \frac{6^2}{30 \times 0,25} + \frac{9^2}{30 \times 0,35} + \frac{7^2}{30 \times 0,20} + \frac{5^2}{30 \times 0,05} - 30 \\ &= \frac{9}{4,5} + \frac{36}{7,5} + \frac{81}{10,5} + \frac{49}{6} + \frac{25}{1,5} - 30 \\ &\approx 9,3476.\end{aligned}$$

- ▶ El valor p es $P(T \geq 9,3476) \approx P(\chi_4^2 \geq 9,348) \approx 0,053$.
- ▶ Entonces, la hipótesis no se rechaza a un nivel **0,05**, pero a todo nivel **mayor que 0,053**, de tal manera que hay duda.

- ▶ Es también posible proponer una prueba cuando los **parámetros son parcialmente conocidos**;
- ▶ Suponemos que estudiamos el **número de accidentes** cada día en una fábrica con una **media λ** desconocida;
- ▶ Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n los números de accidentes por día en una muestra.

- ▶ Es también posible proponer una prueba cuando los **parámetros son parcialmente conocidos**;
- ▶ Suponemos que estudiamos el **número de accidentes** cada día en una fábrica con una **media λ** desconocida;
- ▶ Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n los números de accidentes por día en una muestra.
- ▶ **Problema**: hay un **infinito** de valores posibles.

- ▶ Es también posible proponer una prueba cuando los **parámetros son parcialmente conocidos**;
- ▶ Suponemos que estudiamos el **número de accidentes** cada día en una fábrica con una **media λ** desconocida;
- ▶ Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n los números de accidentes por día en una muestra.
- ▶ **Problema**: hay un **infinito** de valores posibles.
- ▶ **Solución**: dividir los valores posibles en **grupos**.

Dividir el espacio en zonas

- ▶ Por ejemplo, podemos **dividir el espacio** así:

Région 1 : 0 accidente

Région 2 : 1 accidente

Région 3 : 2 o 3 accidentes

Région 4 : 4 o 5 accidentes

Région 5 : **más de 5** accidentes

Dividir el espacio en zonas

- ▶ Por ejemplo, podemos **dividir el espacio** así:

Région 1 : 0 accidente

Région 2 : 1 accidente

Région 3 : 2 o 3 accidentes

Région 4 : 4 o 5 accidentes

Région 5 : más de 5 accidentes

- ▶ Las probabilidades por grupo si la **media es λ** son:

$$P_1 = P(Y = 0) = e^{-\lambda}$$

$$P_2 = P(Y = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$P_3 = P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{6}$$

$$P_4 = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{24} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^5}{120}$$

$$P_5 = P(Y > 5) = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

Estimar los parámetros desconocidos

- ▶ **Segundo problema:** No conocemos λ ;
- ▶ **Solución:** Se estima λ con **máxima verosimilitud**;
- ▶ Entonces, calculamos la estadística

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i},$$

donde X_i es el número de Y_j que son contenidos en el grupo i , para $i = 1, 2, \dots, k$, y \hat{p}_i es una **estimación de la probabilidad** p_i cuando λ se substitue por $\hat{\lambda}$;

- ▶ Si hay m **parámetros estimados** con **EMV**, entonces se propone **rechazar** H_0 si $T \geq \chi_{\alpha, k-1-m}^2$, es decir que se pierde **un grado de libertad por parámetro estimado**.
- ▶ Entonces el **valor** p es $P(\chi_{k-1-m}^2 \geq T)$.

Ejemplo (1/2)

- ▶ Suponemos que el número de accidentes cada semana es

8	0	0	1	3	4	0	2	12	5
1	8	0	2	0	1	9	3	4	5
3	3	4	7	4	0	1	2	1	2.

- ▶ Prueben la hipótesis que el número de accidentes sigue una **distribución de Poisson**.

Ejemplo (1/2)

- ▶ Suponemos que el número de accidentes cada semana es

8	0	0	1	3	4	0	2	12	5
1	8	0	2	0	1	9	3	4	5
3	3	4	7	4	0	1	2	1	2.

- ▶ Prueben la hipótesis que el número de accidentes sigue una **distribución de Poisson**.
- ▶ El número **total** de accidentes es **95**.

Ejemplo (1/2)

- ▶ Suponemos que el número de accidentes cada semana es

8	0	0	1	3	4	0	2	12	5
1	8	0	2	0	1	9	3	4	5
3	3	4	7	4	0	1	2	1	2.

- ▶ Prueben la hipótesis que el número de accidentes sigue una **distribución de Poisson**.
- ▶ El número **total** de accidentes es **95**.
- ▶ La máxima verosimilitud para λ es $\hat{\lambda} = 95/30 \approx \mathbf{3,16667}$.

Ejemplo (2/2)

- ▶ Las probabilidades de los **5 grupos** son

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &\approx 0,04214, & \hat{p}_2 &\approx 0,13346, \\ \hat{p}_3 &\approx 0,43434, & \hat{p}_4 &\approx 0,28841, \\ \hat{p}_5 &\approx 0,10164.\end{aligned}$$

- ▶ Los valores observados son $X_1 = \mathbf{6}$, $X_2 = \mathbf{5}$, $X_3 = \mathbf{8}$, $X_4 = \mathbf{6}$ y $X_5 = \mathbf{5}$.
- ▶ Entonces, la estadística es

$$T = \sum_{i=1}^5 \frac{(X_i - 30\hat{p}_i)^2}{30\hat{p}_i} \approx \mathbf{21,99156}.$$

- ▶ El valor p es $P(\chi_3^2 > 21,99) \approx 1 - 0,999936 \approx \mathbf{0,000064}$.
- ▶ Entonces se **rechaza** la hipótesis que tengamos una distribución de Poisson.