

Cap. 3 : Variables aleatorias

Alexandre Blondin Massé

Departamento de Informática y Matemática
Université du Québec à Chicoutimi

16 de junio del 2015

Modelado de sistemas aleatorios
Ingeniería de sistemas, producción y ambiental

1. Definiciones

2. Tipos de variables aleatorias

3. Esperanza

4. Varianza

Definición

Una **variable aleatoria** X es una función entre el espacio muestra S y \mathbb{R} , es decir $X : S \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▶ Lanzamos **dos dados** regulares.
- ▶ Recordemos que $\mathbf{S} = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
- ▶ Sea X la variable aleatoria igual a la **suma de los dados**.
- ▶ Entonces

$$\begin{aligned} X(1, 1) &= 2 \\ X(1, 2) = X(2, 1) &= 3 \\ X(1, 3) = X(2, 2) = X(3, 1) &= 4 \\ X(1, 4) = X(2, 3) = X(3, 2) = X(4, 1) &= 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Variables aleatoria (2/3)

- ▶ En el ejemplo anterior, los valores **posibles** son 2, 3, ..., 12;
- ▶ Se denota por $P(X = i)$ (o $P\{X = i\}$) la **probabilidad** que X sea igual a i .
- ▶ Entonces

$$P(X = 2) = 1/36;$$

$$P(X = 3) = 2/36;$$

$$\vdots$$

- ▶ **Nota:** $P(X = 0) = P(X = 3,1415) = \dots = 0$.
- ▶ También,

$$\sum_{i=2}^{12} P(X = i) = 1.$$

Ejemplo

- ▶ Se compran **dos componentes electrónicos**, que son **defectuosos** o **funcionales**.
- ▶ Suponemos que los resultados (d, d) , (d, f) , (f, d) , (f, f) ocurren con probabilidad **0,09**, **0,21**, **0,21** y **0,49**, respectivamente.
- ▶ Sea X el número de componentes funcionales.
- ▶ Entonces los valores posibles de X son 0, 1, 2, y

$$P(X = 0) = 0,09,$$

$$P(X = 1) = 0,42,$$

$$P(X = 2) = 0,49.$$

- ▶ Ahora estudiamos el evento A : «**Al menos uno** de los componentes es funcional».
- ▶ Sea I la variable aleatoria que vale **1** si es el caso, **0** si no (como una variable **booleana**).

- ▶ Entonces

$$I = \begin{cases} 1, & \text{si } X = 1 \text{ o } X = 2; \\ 0, & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

- ▶ La variable I se llama **variable indicatriz** del evento A .
- ▶ En el ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned} P(I = 1) &= P(A) = 0,91, \\ P(I = 0) &= P(\bar{A}) = 0,09. \end{aligned}$$

Definición

Sea X una variable aleatoria. La **función de distribución acumulada (FDA)** $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de X es

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Notación

Si F es la FDA de X , se escribe $X \sim F$.

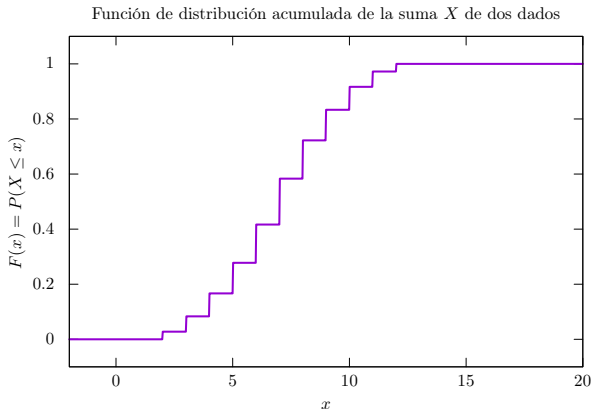
Por ejemplo, estudiaremos la **distribución normal** y se escribirá

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

para indicar que X tiene una distribución normal de media **0** y de varianza **1**.

Ejemplo

- ▶ Sea X la variable aleatoria que describe la suma de **dos dados** regulares.
- ▶ ¿Cuál es la forma del **gráfico** de la FDA de X ?



- ▶ Sea X una **variable aleatoria**.
- ▶ Si conocemos la **FDA** F de X , entonces es fácil calcular probabilidades.
- ▶ De hecho, tenemos

$$\mathbf{P(X \leq a)} = F(a)$$

$$\mathbf{P(X > a)} = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

- ▶ También, si $a < b$, entonces

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

de tal manera que

$$\mathbf{P(a < X \leq b)} = F(b) - F(a).$$

Tabla de contenidos

1. Definiciones

2. Tipos de variables aleatorias

3. Esperanza

4. Varianza

Variable discreta (1/2)

Hay 2 tipos: **discreta** y **continua**.

Definición

Una variable se llama **discreta** si el conjunto de todos los valores a qué puede ser igual es **finito** o **contable**.

Definición

Si X es una variable aleatoria **discreta**, su **función de probabilidad** es

$$p(x) = P(X = x).$$

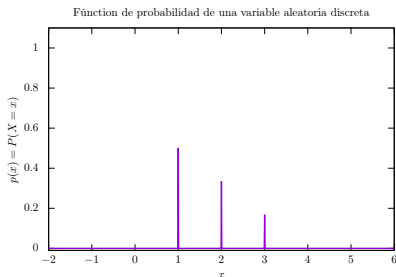
Variable discreta (2/2)

- ▶ Sea X una variable aleatoria **discreta** que puede ser solamente **1, 2 o 3**.
- ▶ Suponemos que

$$p(1) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad p(2) = \frac{1}{3}.$$

- ▶ Entonces,

$$p(3) = 1 - p(1) - p(2) = 1 - 1/2 - 1/3 = \mathbf{1/6}.$$



Si

- ▶ X es una variable aleatoria **discreta**;
- ▶ F es su **función de distribución acumulada** y
- ▶ p es su función de **probabilidad**,

entonces

$$F(x) = \sum_{a \leq x} p(a).$$

Ejemplo

- ▶ Tomamos de nuevo el ejemplo de variable X cuya función de probabilidad es

$$p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{1}{3}, \quad p(3) = \frac{1}{6}.$$

- ▶ ¿Cuál es la **FDA** F de X ?

Ejemplo

- ▶ Tomamos de nuevo el ejemplo de variable X cuya función de probabilidad es

$$p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{1}{3}, \quad p(3) = \frac{1}{6}.$$

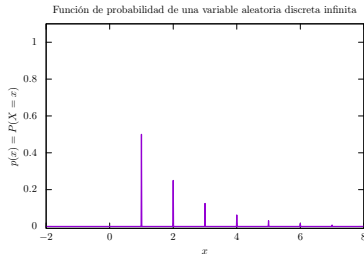
- ▶ ¿Cuál es la **FDA** F de X ?
- ▶ Obtenemos

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1; \\ 1/2, & \text{si } 1 \leq x < 2; \\ 5/6, & \text{si } 2 \leq x < 3; \\ 1, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Variable aleatoria discreta infinita (1/2)

- ▶ Una variable aleatoria **discreta** puede tomar un número **infinito** de valores;
- ▶ Por ejemplo, sea X la variable aleatoria cuya **función de probabilidad** es

$$\begin{aligned}p(1) &= 1/2 \\p(2) &= 1/4 \\p(3) &= 1/8 \\p(4) &= 1/16 \\&\vdots\end{aligned}$$



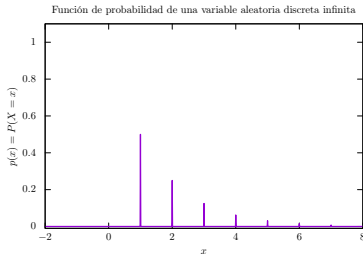
Variable aleatoria discreta infinita (1/2)

- ▶ Una variable aleatoria **discreta** puede tomar un número **infinito** de valores;
- ▶ Por ejemplo, sea X la variable aleatoria cuya **función de probabilidad** es

$$\begin{aligned}p(1) &= 1/2 \\p(2) &= 1/4 \\p(3) &= 1/8 \\p(4) &= 1/16 \\&\vdots\end{aligned}$$

- ▶ En general,

$$p(x) = \frac{1}{2^x}, \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4, \dots$$



Variable aleatoria discreta infinita (2/2)

- ▶ Para que sea una **función de probabilidad**, hay que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1.$$

- ▶ En este caso, tenemos

$$\sum_{i=1}^n p(i) =$$

Variable aleatoria discreta infinita (2/2)

- ▶ Para que sea una **función de probabilidad**, hay que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1.$$

- ▶ En este caso, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p(i) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \end{aligned}$$

Variable aleatoria discreta infinita (2/2)

- ▶ Para que sea una **función de probabilidad**, hay que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1.$$

- ▶ En este caso, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p(i) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] - 1 \\ &= \end{aligned}$$

Variable aleatoria discreta infinita (2/2)

- ▶ Para que sea una **función de probabilidad**, hay que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1.$$

- ▶ En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p(i) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] - 1 \\ &= \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1} - 1 \rightarrow \frac{-1}{-1/2} - 1 = 2 - 1 = 1,\end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición

Una **variable aleatoria continua** es una variable aleatoria que puede tomar un número **incontable** de valores. En general, los valores son **intervalos reales**.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La **función de densidad** de X es la única función f que satisface

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

para cualquier subconjunto real $A \subseteq \mathbb{R}$.

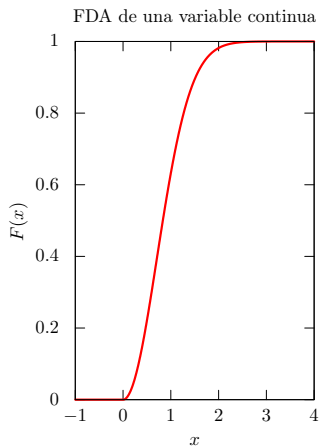
Ejemplo

- ▶ Sea X una variable aleatoria cuya **FDA** es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuál es la probabilidad que $X > 1$?
- ▶ Tenemos

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - F(1) \\ &= 1 - e^{-1^2} \\ &\approx 0,368. \end{aligned}$$



- ▶ Sea X una variable aleatoria **continua**;
- ▶ Para que f sea una **función de densidad** de X , hay que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

- ▶ Sea X una variable aleatoria **continua**;
- ▶ Para que f sea una **función de densidad** de X , hay que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

- ▶ También,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

- ▶ Entonces, tenemos que evaluar una **integral definida**.

Si

- ▶ X es una variable aleatoria **continua**;
- ▶ F es su **FDA** y
- ▶ f es su función de **densidad**,

Si

- ▶ X es una variable aleatoria **continua**;
- ▶ F es su **FDA** y
- ▶ f es su función de **densidad**,

entonces

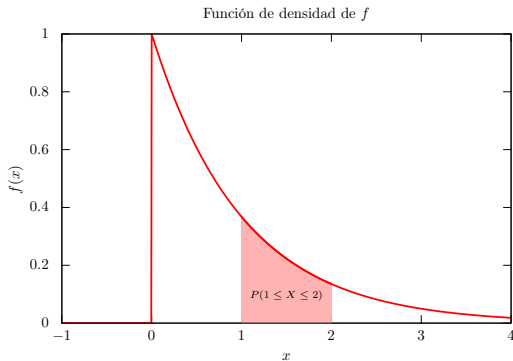
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$
$$F'(x) = f(x).$$

Ejemplo (1/2)

Sea la **función**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Demostren que es una **función de densidad**.
(b) Calculen $P(1 \leq X \leq 2)$.



- ▶ Sea X una variable aleatoria continua cuya **densidad** es

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{si } 0 < x < 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuál es el valor del **parámetro** C ?
- ▶ ¿Cuál es el valor de $P(X > 1)$?

Parámetro incógnito (2/3)

- ▶ Hay que el área **bajo la curva** sea igual a 1.

Parámetro incógnito (2/3)

- ▶ Hay que el área **bajo la curva** sea igual a 1.
- ▶ Entonces

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 C(4x - 2x^2)dx = C \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2.$$

Parámetro incógnito (2/3)

- ▶ Hay que el área **bajo la curva** sea igual a 1.
- ▶ Entonces

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 C(4x - 2x^2)dx = C \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2.$$

- ▶ Consecuamente,

$$1 = C \left(8 - \frac{16}{3} \right) - 0 = \frac{8}{3} C$$

lo que implica que $C = 3/8$.

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$P(X > 1) =$$

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\ &= \end{aligned}$$

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\&= \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx \\&= \end{aligned}$$

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\&= \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx \\&= \frac{3}{8} \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\&= \end{aligned}$$

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\&= \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx \\&= \frac{3}{8} \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\&= \frac{3}{8} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right) \\&= \end{aligned}$$

Parámetro incógnito (3/3)

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\&= \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx \\&= \frac{3}{8} \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\&= \frac{3}{8} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right) \\&= 0,5.\end{aligned}$$

Tabla de contenidos

1. Definiciones

2. Tipos de variables aleatorias

3. Esperanza

4. Varianza

Definición

Sea X una variable aleatoria discreta. La **esperanza** de X es

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Si p es la **función de probabilidad** de X , entonces

$$E[X] = \sum_{x \in \text{dom}(X)} x \cdot p(x),$$

donde $\text{dom}(X)$ es el **dominio** de X .

Ejemplo

- ▶ Sea X la variable aleatoria que describe el resultado cuando se **lanza un dado**.
- ▶ Calculamos $E[X]$.
- ▶ Tenemos que $\text{dom}(\mathbf{X}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ También, $p(x) = 1/6$ para cada $x \in \text{dom}(X)$.
- ▶ Entonces

$$E[X] = \sum_{i=1}^6 \left(i \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5.$$

- ▶ Es importante notar que **3,5** no es un resultado **posible**, pero **la media esperada** si se lanza un dado varias veces es **3,5**.

Definición

Sea X una variable aleatoria *continua*. La *esperanza* de X es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Es posible que *no existe*, por ejemplo en el caso donde la integral *no converge*.

Ejemplo

- ▶ Esperamos una llamada **entre 5:00PM y 6:30PM** hoy.
- ▶ Sea X la variable aleatoria que cuenta **(en hora) el tiempo** a partir de **5:00PM** hasta que haya la llamada.
- ▶ Suponemos que la **densidad** de X es

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } 0 < x < 3/2; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuánto tiempo vamos a esperar?

Ejemplo

- ▶ Esperamos una llamada **entre 5:00PM y 6:30PM** hoy.
- ▶ Sea X la variable aleatoria que cuenta **(en hora) el tiempo** a partir de **5:00PM** hasta que haya la llamada.
- ▶ Suponemos que la **densidad** de X es

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } 0 < x < 3/2; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuánto tiempo vamos a esperar?
- ▶ Obtenemos

$$E[X] = \int_0^{3/2} x \cdot \frac{2}{3} dx =$$

Ejemplo

- ▶ Esperamos una llamada **entre 5:00PM y 6:30PM** hoy.
- ▶ Sea X la variable aleatoria que cuenta **(en hora) el tiempo** a partir de **5:00PM** hasta que haya la llamada.
- ▶ Suponemos que la **densidad** de X es

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } 0 < x < 3/2; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuánto tiempo vamos a esperar?
- ▶ Obtenemos

$$E[X] = \int_0^{3/2} x \cdot \frac{2}{3} dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{3/2} =$$

Ejemplo

- ▶ Esperamos una llamada **entre 5:00PM y 6:30PM** hoy.
- ▶ Sea X la variable aleatoria que cuenta (**en hora**) el **tiempo** a partir de **5:00PM** hasta que haya la llamada.
- ▶ Suponemos que la **densidad** de X es

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } 0 < x < 3/2; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ ¿Cuánto tiempo vamos a esperar?
- ▶ Obtenemos

$$E[X] = \int_0^{3/2} x \cdot \frac{2}{3} dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{3/2} = \frac{3}{4}.$$

Teorema

Sea X una *variable aleatoria* y g una *función real*.

- ▶ Si X es *discreta* con *función de probabilidad* $p(x)$, entonces

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \text{dom}(p)} g(x)p(x),$$

- ▶ Si X es *continua* con *densidad* $f(x)$, entonces

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Corolario

$E[aX + b] = aE[X] + b$, para cualquieras *constantes* $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias, entonces

$$E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i],$$

incluso si las variables **no son independientes**.

Sin el símbolo Σ , se escribe

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n].$$

Ejemplos (1/4)

- ▶ Una empresa de construcción presenta **3 ofertas** totalizando **10K\$, 20K\$ y 30K\$** de beneficio respectivamente.
- ▶ Suponemos que las probabilidades de **obtener** el contrato son **0,2, 0,8 y 0,3**.
- ▶ ¿Cuál es el beneficio esperado para los 3 contratos?

- ▶ Una empresa de construcción presenta **3 ofertas** totalizando **10K\$, 20K\$ y 30K\$** de beneficio respectivamente.
- ▶ Suponemos que las probabilidades de **obtener** el contrato son **0,2, 0,8 y 0,3**.
- ▶ ¿Cuál es el beneficio esperado para los 3 contratos?
- ▶ Para $i = 1, 2, 3$, sea X_i la variable aleatoria que cuenta el beneficio para la **oferta i** y $P = X_1 + X_2 + X_3$ una otra variable aleatoria.

Ejemplos (2/4)

► Entonces

$$E[X_1] =$$

Ejemplos (2/4)

► Entonces

$$E[X_1] = 0 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}) + 10000 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{10000})$$

Ejemplos (2/4)

► Entonces

$$\begin{aligned} E[X_1] &= 0 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}) + 10000 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{10000}) \\ &= 0 + 10000 \cdot 0,2 \end{aligned}$$

Ejemplos (2/4)

► Entonces

$$\begin{aligned} E[X_1] &= 0 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}) + 10000 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{10000}) \\ &= 0 + 10000 \cdot 0,2 \\ &= 2000. \end{aligned}$$

- ▶ Entonces

$$\begin{aligned}E[X_1] &= 0 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}) + 10000 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{10000}) \\ &= 0 + 10000 \cdot 0,2 \\ &= 2000.\end{aligned}$$

- ▶ De manera similar,

$$E[X_2] = 16000 \quad \text{et} \quad E[X_3] = 12000.$$

Ejemplos (2/4)

- ▶ Entonces

$$\begin{aligned}E[X_1] &= 0 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}) + 10000 \cdot P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{10000}) \\ &= 0 + 10000 \cdot 0,2 \\ &= 2000.\end{aligned}$$

- ▶ De manera similar,

$$E[X_2] = 16000 \quad \text{et} \quad E[X_3] = 12000.$$

- ▶ Entonces,

$$\begin{aligned}E[P] &= E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] \\ &= 2000 + 16000 + 12000 \\ &= \mathbf{30000}.\end{aligned}$$

Ejemplos (3/4)

- ▶ En una habitación, hay N **personas** que tienen un sombrero.
- ▶ Suponemos que estas personas lanzan **su sombrero** en el medio de la habitación.
- ▶ Luego, cada persona recoge **al azar** un sombrero.
- ▶ ¿Cuántas personas pueden esperar recoger **su propio sombrero**?

Exemples (4/4)

- ▶ Sea X el número de sombreros que son con la persona correcta.

Exemples (4/4)

- ▶ Sea X el número de sombreros que son con la persona correcta.
- ▶ Para $i = 1, 2, \dots, N$, sea X_i la variable aleatoria definida por

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la persona } i \text{ tiene su propio sombrero,} \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Exemples (4/4)

- ▶ Sea X el número de sombreros que son con la persona correcta.
- ▶ Para $i = 1, 2, \dots, N$, sea X_i la variable aleatoria definida por

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la persona } i \text{ tiene su propio sombrero,} \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Tenemos

$$E[X_i] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = 1 \cdot \frac{1}{N} + 0 \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}.$$

Exemples (4/4)

- ▶ Sea X el número de sombreros que son con la persona correcta.
- ▶ Para $i = 1, 2, \dots, N$, sea X_i la variable aleatoria definida por

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la persona } i \text{ tiene su propio sombrero,} \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Tenemos

$$E[X_i] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = 1 \cdot \frac{1}{N} + 0 \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}.$$

- ▶ Entonces,

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = \frac{1}{N} \cdot N = 1.$$

- ▶ Así, sin importar el número de personas, esperamos que **exactamente una** de ellas tiene su propio sombrero.

Tabla de contenidos

1. Definiciones

2. Tipos de variables aleatorias

3. Esperanza

4. Varianza

Definición

Sea X una variable aleatoria de *media* (o de *esperanza*) $\mu = E[X]$. Entonces la *varianza* de X , denotada por $\text{Var}(X)$, es

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[\mathbf{X}^2] - \mathbf{E}[\mathbf{X}]^2.$$

Demostración

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = E[(X - \mu)^2]$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]\end{aligned}$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2]\end{aligned}$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2\end{aligned}$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E[X]^2\end{aligned}$$

Fórmula para la varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E[X]^2 \\ &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.\end{aligned}$$

Ejemplo

- ▶ Lanzamos **un dado** regular.
- ▶ Sea X la variable aleatoria que indica **el resultado**.
- ▶ Deseamos calcular $\text{Var}(X)$.
- ▶ Ya sabemos que $E[X] = 7/2 = 3,5$.
- ▶ Calculamos ahora $E[X^2]$:

$$E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

- ▶ La varianza es

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx \mathbf{2,92}$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Obtenemos

$$\mathbf{E[I]} = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = \mathbf{P(A)}.$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Obtenemos

$$\mathbf{E[I]} = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = \mathbf{P(A)}.$$

- ▶ También,

$$\mathbf{Var(I)} = E[I^2] - E[I]^2$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Obtenemos

$$\mathbf{E[I]} = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = \mathbf{P(A)}.$$

- ▶ También,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var(I)} &= E[I^2] - E[I]^2 \\ &= E[I] - E[I]^2 \end{aligned}$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Obtenemos

$$\mathbf{E[I]} = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = \mathbf{P(A)}.$$

- ▶ También,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var(I)} &= E[I^2] - E[I]^2 \\ &= E[I] - E[I]^2 \\ &= E[I](1 - E[I]) \end{aligned}$$

Esperanza y varianza de una variable indicatriz

- ▶ Sea A un **evento** y I la **variable indicatriz** de A :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre;} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

- ▶ Obtenemos

$$\mathbf{E[I]} = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = \mathbf{P(A)}.$$

- ▶ También,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var(I)} &= E[I^2] - E[I]^2 \\ &= E[I] - E[I]^2 \\ &= E[I](1 - E[I]) \\ &= \mathbf{P(A)[1 - P(A)]}. \end{aligned}$$

Propiedades de la varianza

Teorema

Sean X una variable aleatoria de **esperanza** $\mu = E[X]$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Demostración

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - E[aX + b])]^2 \\ &= E[(aX + b - a\mu - b)^2] \\ &= E[(aX - a\mu)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu)^2] \\ &= a^2 \text{Var}(x). \end{aligned}$$

Écart-type d'une variable aléatoire

Definición

Sea X una variable aleatoria. Entonces la **desviación estándar** de X es

$$\sigma(\mathbf{X}) = \sqrt{\text{Var}(x)}.$$

Nota

Las **unidades de medida** de la **esperanza** y de la **desviación estándar** son las mismas que la de la variable aleatoria. Para la **varianza**, las unidades son elevadas al **cuadrado**.