

Devoir 1

INF1130 — Mathématiques pour informaticien

Présenté à Alexandre Blondin Massé

Date de remise : au plus tard le 27 février 2015, avant 16h00,
dans la chute à courrier du département d'informatique, située au PK-4150

Nom :

Code permanent :

Question	1	2	3	4	5	Total
Sur	35	30	40	25	20	150
Note						

Instructions

1. Le devoir doit être rédigé **individuellement**;
2. Votre document peut être rédigé à la main à condition de ne pas utiliser de **crayon de plomb** et de **soigner** votre écriture;
3. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses;
4. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées;
5. **Aucun retard** n'est permis, car la solution sera mise en ligne le 25 février à partir de 16h00.
6. Vous devez utiliser cette page comme page couverture lors de la remise de votre devoir, sinon votre travail **ne sera pas corrigé**.

1. (35 points) PROPOSITIONS

(a) À l'aide de table de vérité ou autrement,

- i. (7 points) déterminez si les propositions $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ et $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ sont logiquement équivalentes;
- ii. (7 points) déterminez si les propositions $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ et $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ sont logiquement équivalentes.

(b) Soit les quatre propositions quantifiées suivantes :

$$Q_1 : \exists x \exists y P(x, y)$$

$$Q_2 : \forall x \exists y P(x, y)$$

$$Q_3 : \exists y \forall x P(x, y)$$

$$Q_4 : \forall x \forall y P(x, y)$$

- i. (10 points) Soit \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels, l'univers du discours. Trouvez un prédicat $P(x, y)$ tel que

- α) Q_1 est fausse;
- β) Q_1 est vraie mais Q_2 est fausse;
- γ) Q_2 est vraie mais Q_3 est fausse;
- δ) Q_3 est vraie mais Q_4 est fausse;
- ϵ) Q_4 est vraie.

Vous devez justifier toutes vos réponses. Les cinq sous-questions sont indépendantes les unes des autres.

- ii. Démontrez que si l'univers du discours

- α) (5 points) est non vide alors les trois propositions $Q_4 \rightarrow Q_3$, $Q_3 \rightarrow Q_2$ et $Q_2 \rightarrow Q_1$ sont toutes vraies;
- β) (6 points) est vide alors Q_2 et Q_4 sont vraies et Q_1 et Q_3 sont fausses quelque soit le prédicat.

2. (30 points) ENSEMBLES

(a) Soit $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'ensemble universel, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$.

- i. (2 points) Donnez la liste de tous les éléments de l'ensemble $(A \cup B) \times (A \cap B)$.
- ii. (3 points) Donnez la liste de tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(U - (A \oplus B))$.

(b) (10 points) Montrez par la méthode de votre choix que

$$[(A \cup C) - B] \cup [B - (A \cup C)] = (A - B) \cup [\bar{A} \cap ((B - C) \cup (C - B))].$$

(c) (5 points) Donnez une formule pour $|A \oplus B|$ en fonction de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$ uniquement. Démontrez cette formule (*Aide* : Servez-vous du fait que si U est l'ensemble universel alors $|\bar{A}| = |U| - |A|$)

(d) (10 points) Démontrez l'équivalence $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$

3. (40 points) FONCTIONS

(a) (20 points) Pour chacune des fonctions suivantes de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (\mathbb{R} étant l'ensemble des nombres réels),

- i. $f(x) = 2^x$,
- ii. $f(x) = x^3$,
- iii. $f(x) = x^2$,
- iv. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$,

Déterminez si elle est injective et si elle est surjective. Justifiez vos réponses. Ensuite, pour chacune des quatre fonctions, trouvez le plus grand sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ et le plus grand sous ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $\{x \mid x > 1\} \subseteq A$ et $\{x \mid x > 1\} \subseteq B$ et tels que $f : A \rightarrow B$ soit inversible, et donnez sa réciproque, y compris son domaine et son codomaine.

(b) (20 points) Soit $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 3x + 2$ des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Elles sont inversibles (vous n'êtes pas tenu.e.s de le démontrer). Trouvez les fonctions $(f \circ g)^{-1}(y)$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(y)$ et $(g^{-1} \circ f^{-1})(y)$. En général, si f et g sont des fonctions inversibles, trouvez l'inverse de $f \circ g$ en fonction de f^{-1} et g^{-1} et donnez, avec justifications, sa réciproque.

4. (25 points) SUITES ET ARITHMÉTIQUE MODULAIRE

Soient k et m deux entiers, où $m > 0$. On définit une suite $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $s_i = (ki) \bmod m$.

(a) (10 points) Calculez les $2m$ premiers termes de la suite $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ si

- i. $k = 1$ et $m = 8$;
- ii. $k = 2$ et $m = 8$;
- iii. $k = 3$ et $m = 8$;
- iv. $k = 4$ et $m = 8$;
- v. $k = 5$ et $m = 8$;

(b) (5 points) On dit d'une suite $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ qu'elle est *périodique* s'il existe un entier strictement positif p tel que $a_i = a_{i+p}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Si un tel entier p existe, alors le plus petit d'entre eux est alors appelé *période* de la suite. Pour chacun des exemples de la partie (a), indiquez si la suite est périodique et donnez sa période le cas échéant.

(c) (10 points) Donnez une formule générale pour la période de la suite $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en fonction de k et de m .

5. (20 points) SOMMES ET DIVISIBILITÉ

(a) (12 points) Simplifiez le plus possible les sommes suivantes :

- i. $\sum_{i=0}^{100} (3i + 4)$
- ii. $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 \text{pgcd}(i, j)$
- iii. $\sum_{i=1}^n (2^i + i + 2)$

iv. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ij)$

Remarque : Par “simplifier”, on entend que vous devez exprimer le résultat sans ... ni le symbole \sum .

- (b) (8 points) Étant donné un nombre entier positif n , dénotons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs stricts de n , c'est-à-dire

$$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divise } n \text{ et } 1 \leq d < n\}.$$

On dit qu'un nombre naturel est *déficient*, *parfait* ou *abondant* selon que

$$\sum_{d \in D(n)} d < n, \quad \sum_{d \in D(n)} d = n \quad \text{ou} \quad \sum_{d \in D(n)} d > n.$$

Indiquez si les nombres 24, 26, 28 et 30 sont déficients, parfaits ou abondants.