

Examen intra — Hiver 2015

INF1130 — Mathématiques pour informaticien

Veillez cocher : Louise Laforest (groupe 10)
 Alexandre Blondin Massé (groupe 40)

Nom :

Code permanent :

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|----------|----|----|----|----|----|----|-------|
| Sur | 20 | 20 | 20 | 10 | 15 | 15 | 100 |
| Note | | | | | | | |

Instructions

1. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses;
2. Vous avez droit à toute documentation **écrite**;
3. L'utilisation de la **calculatrice** ou tout autre appareil **électronique** (téléphone cellulaire, petit ordinateur, etc.) est **interdit**;
4. La durée de l'examen est de **3 heures**, de 13h30 à 16h30;
5. Les **surveillants** de répondront à aucune question;
6. Il est interdit de **dégrafer** le questionnaire : aucun questionnaire avec des pages manquantes ne sera corrigé;
7. **Aucune sortie** n'est permise durant l'examen;
8. Vous devez présenter votre **carte étudiante** sur demande.

1. (20 points) PROPOSITIONS

(a) Considérez les propositions

$$F : p \vee (p \rightarrow (p \wedge q))$$

$$G : \neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q)$$

i. (8 points) Est-ce que $F \Leftrightarrow G$? Justifiez votre réponse.ii. (2 points) F et G sont-elles des tautologies ? Des contradictions ? Justifiez votre réponse.

(b) Soit $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ une fonction définie par $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$. Soit $P(x, y)$ le prédicat défini par $P(1, 1) = \text{vrai}$, $P(1, 2) = \text{vrai}$, $P(2, 1) = \text{faux}$ et $P(2, 2) = \text{faux}$, où l'univers du discours de x et de y est $\{1, 2\}$. Évaluez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

i. (5 points) $\forall x \exists y P(x, y)$

ii. (5 points) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

2. (20 points) ENSEMBLES

(a) Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble universel fini U . Donnez la liste des expressions suivantes en ordre croissant de grandeur :

i. (5 points) $|A|, |A \cup B|, |A \cap B|, |U|, |\emptyset|$

ii. (5 points) $|A - B|, |A \oplus B|, |A| + |B|, |A \cup B|, |\emptyset|$

(b) Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ et $D = \{1, 3, 4, 5, 7, 10\}$. Décrivez les ensembles suivants en extension (c'est-à-dire en énumérant tous les éléments) :

i. (1 point) $A \cap B$

i. _____

ii. (1 point) $B - D$

ii. _____

iii. (1 point) $A \oplus C$

iii. _____

iv. (1 point) $D \cup C$

iv. _____

v. (2 points) $\mathcal{P}(D - (A \oplus B))$

v. _____

vi. (2 points) $(A \cap C) \times D$

vi. _____

vii. (2 points) $(B - (A \cup C \cup D)) \times A$

vii. _____

3. (20 points) FONCTIONS

(a) Soient $f : A \rightarrow A$ et $g : A \rightarrow A$ deux fonctions, où $A = \{1, 2, 3, 4\}$, définies par

$$g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4, g(4) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 2.$$

i. (10 points) Trouvez $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f \circ f$ et f^{-1} .

ii. (4 points) Montrez que g n'est pas inversible.

(b) (6 points) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifiez votre réponse. *Indice* : n est pair ou impair.

4. (10 points) SUITES ET SOMMES

Évaluez les sommes suivantes :

(a) (5 points)

$$\sum_{i \in I} 2^i,$$

où $I = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 \leq a \leq 10, a \bmod 3 = 2\}$.

(b) (5 points)

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} (i - j)$$

5. (15 points) ENTIERS ET DIVISIBILITÉ

(a) Pour chacune des équations suivantes, décrivez l'ensemble de tous les x , où $x \in \mathbb{Z}$, qui la satisfont :

i. (4 points) $x \equiv 2 \pmod{3}$;

ii. (4 points) $2x - 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

- (b) (7 points) Il existe une astuce simple permettant de déterminer si un nombre n est divisible par 3. Il suffit d'additionner chacun de ses chiffres et de vérifier si la somme est elle-même divisible par 3. L'objectif de cette question est de démontrer cette propriété.

Tout d'abord, remarquons que si les k chiffres de n sont d_{k-1}, \dots, d_1, d_0 , alors on a la relation

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} d_i 10^i.$$

Par exemple, si $n = 136$, on a bien

$$136 = 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2.$$

En utilisant cette relation et des propriétés vues en classe, montrez que si la somme des chiffres de n est divisible par 3, alors n est lui aussi divisible par 3. *Indice :* Vous pouvez prendre pour acquis que $10^j \equiv 1 \pmod{3}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

6. DÉMONSTRATIONS

- (a) (7 points) À l'aide des règles d'inférence vues en classe (modus ponens, modus tollens, etc.), montrez que

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow (r \wedge s) \\ \neg r \vee (\neg t \vee u) \\ p \wedge t \\ \hline \therefore u \end{array}$$

Justifiez bien chacune des étapes de votre raisonnement.

- (b) (8 points) Montrez que le produit de trois nombres naturels consécutifs est divisible par 6.