

Examen final — Hiver 2015

INF1130 — Mathématiques pour informaticien

Veillez cocher : Louise Laforest (groupe 10)
 Alexandre Blondin Massé (groupe 40)

Nom :

Code permanent :

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|----------|----|----|----|----|----|----|-------|
| Sur | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 100 |
| Note | | | | | | | |

Instructions

1. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses;
2. Vous avez droit à toute documentation **écrite**;
3. L'utilisation de la **calculatrice** ou tout autre appareil **électronique** (téléphone cellulaire, petit ordinateur, etc.) est **interdit**;
4. La durée de l'examen est de **3 heures**, de 13h30 à 16h30;
5. Les **surveillants** de répondront à aucune question;
6. Il est interdit de **dégrafer** le questionnaire : aucun questionnaire avec des pages manquantes ne sera corrigé;
7. **Aucune sortie** n'est permise durant l'examen;
8. Vous devez présenter votre **carte étudiante** sur demande.

1. (15 points) COMPLEXITÉ

- (a) Utilisez la notation \mathcal{O} pour décrire le taux de croissance de chacune des fonctions suivantes. Votre estimation doit être aussi simple et précise que possible. Dans chaque cas, on suppose que le domaine de la fonction est l'ensemble des entiers strictement positifs, c'est-à-dire que $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$.

i. (2 points) $f_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

i. _____

ii. (2 points) $f_2(n) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$

ii. _____

iii. (2 points) $f_3(n) = n \log_2 n$

iii. _____

iv. (2 points) $f_4(n) = n^2 + 3n + 2$

iv. _____

v. (2 points) $f_5(n) = (n + 1) \log_5(3n^2 - 2n + 100)$

v. _____

- (b) (5 points) Ordonnez ces fonctions selon la relation \mathcal{O} . Autrement dit, si $f(n)$ est dans $\mathcal{O}(g(n))$ mais que $g(n)$ n'est pas dans $\mathcal{O}(f(n))$, placez $f(n)$ au-dessus de $g(n)$. Si $f(n)$ est dans $\mathcal{O}(g(n))$ et $g(n)$ est dans $\mathcal{O}(f(n))$, placez $f(n)$ et $g(n)$ sur la même ligne.

2. (15 points) ALGORITHMES

Considérez l'algorithme suivant qui calcule combien de valeurs du tableau de nombres entiers T , de longueur n , sont comprises entre a et b inclusivement.

```

1: fonction COMPTEUR( $T$  : tableau indicé de 0 à  $n - 1$ ,  $a$  : entier,  $b$  : entier) : entier
2:    $compteur \leftarrow 0$ 
3:   pour  $i \leftarrow 0, 1, \dots, n - 1$  faire
4:     si  $a \leq T[i] \leq b$  alors
5:        $compteur \leftarrow compteur + 1$ 
6:     fin si
7:   fin pour
8:   retourner  $compteur$ 
9: fin fonction

```

(a) Faites la trace de cet algorithme avec $T = [18, -11, 28, -2, 9, 18]$ avec les valeurs de a et b données :

i. (3 points) $a = -10, b = 10$

| | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $compteur$ | | | | | | |

ii. (3 points) $a = 5, b = 0$

| | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $compteur$ | | | | | | |

(b) (5 points) Déterminez le nombre exact d'opérations de *comparaison* ($<$, \leq , $=$, \geq , $>$, \neq) qui sont effectuées par l'algorithme en fonction de n . *Remarque* : Vous pouvez supposer que les deux comparaisons de la ligne 4 sont toujours effectuées.

(c) (4 points) Donnez un estimé \mathcal{O} du temps d'exécution de l'algorithme en fonction de n .

3. (15 points) INDUCTION MATHÉMATIQUE ET DÉFINITIONS RÉCURSIVES

Soit la suite $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la façon suivante :

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad \text{et} \quad b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2 \quad \text{pour } n \geq 2.$$

- (a) (4 points) Calculez b_2, b_3, b_4 et b_5 .
- (b) (3 points) Exprimez b_n à l'aide d'une formule explicite (c'est-à-dire non récursive), pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) (8 points) Utilisez le deuxième principe d'induction (induction forte) pour démontrer la formule que vous avez trouvée en (b).

4. (15 points) ALGORITHMES RÉCURSIFS

Considérez l'algorithme récursif suivant :

```
1: fonction MYSTÈRE( $s$  : chaîne de caractères) : booléen
2:    $n \leftarrow s.$ LONGUEUR()
3:   si  $n = 0$  ou  $n = 1$  alors
4:      $\text{résultat} \leftarrow \text{vrai}$ 
5:   sinon si  $s[0] \neq s[n - 1]$  alors
6:      $\text{résultat} \leftarrow \text{faux}$ 
7:   sinon
8:      $\text{résultat} \leftarrow \text{MYSTÈRE}(s.\text{SOUSCHAINE}(1, n - 1))$ 
9:   fin si
10:  retourner  $\text{résultat}$ 
11: fin fonction
```

On utilise la notation suivante :

- Si s est une chaîne de caractères de longueur n , alors $s[i]$ retourne le caractère en position i , pour tout indice $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$;
 - Si s est une chaîne de caractères de longueur n , alors $s.\text{SOUSCHAINE}(i, j)$ retourne la sous-chaîne entre l'indice i (inclus) et l'indice j (exclu), où $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $i \leq j$. Par exemple, "bonjour".SOUSCHAINE(2, 4) retourne "nj".
- (a) (10 points) Donnez un exemple de chaîne de caractères w de longueur au moins 3 tel que MYSTÈRE(w) retourne *vrai* et un autre exemple tel que MYSTÈRE(w) retourne *faux*.

- (b) (5 points) Expliquez en quelques mots ce que fait la fonction MYSTÈRE.

5. (20 points) RELATIONS

(a) Soit la relation binaire $R = \{(a,b) \mid a < b + 3\}$ sur \mathbb{Z} .

- i. (10 points) R est-elle réflexive ? R est-elle symétrique ? R est-elle anti-symétrique ? R est-elle transitive ? R est-elle une relation d'équivalence ? Vous devez justifier vos réponses par une courte démonstration ou un contre-exemple.

- ii. (5 points) Donnez la fermeture réflexive de R ainsi que sa fermeture symétrique.
(Décrivez ces ensembles le plus simplement possible pour avoir tous les points.)

- (b) (5 points) Soient $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{x, y, z\}$, R_1 une relation de A vers B et R_2 une relation de B vers C où

$$R_1 = \{(a,b) \mid b^2 - a^2 \geq 4\} \quad \text{et} \quad R_2 = \{(1,x), (2,x), (2,z), (3,y), (4,x), (4,y)\}.$$

Trouvez $R_2 \circ R_1$

6. (20 points) RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Soit $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où aRb si et seulement si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$.

(a) (8 points) Montrez que R est une relation d'équivalence.

(b) (4 points) Décrivez les ensembles $[1]_R$ et $[2,03]_R$. *Indice* : Décrivez ces ensembles à l'aide de la notation pour les intervalles fermés $[x,y]$, ouverts (x,y) ou semi-ouverts $[x,y)$, $(x,y]$.

(c) (4 points) Donnez une formule générale pour l'ensemble $[n]_R$, peu importe $n \in \mathbb{N}$.

(d) (4 points) Décrivez l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{\infty} [i]_R$ le plus simplement possible.