

## Exercices supplémentaires

### 1 Fonctions

1.1 Déterminez si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  si

- |                      |                               |                                  |
|----------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(x) = 1/x$ ;   | (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ; | (e) $f(x) = 1/(x^2 - 4)$ ;       |
| (b) $f(x) = \pm x$ ; | (d) $f(x) = \sqrt{x}$ ;       | (f) $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$ . |

1.2 Considérez une fonction  $f$  dont la règle de correspondance est  $f(x) = 2x$ . Donnez la valeur de

- |                       |                       |                       |              |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|
| (a) $f(\mathbb{Z})$ ; | (b) $f(\mathbb{N})$ ; | (c) $f(\mathbb{R})$ ; | (d) $f(S)$ , |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|

où  $S = \{10, 11, 12\}$ .

1.3 Dites si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et/ou bijectives. Si elles sont bijectives, donnez leur inverse. Démontrez vos résultats.

- (a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto x + 3$ ;
- (b) La fonction  $f(x) = x + 3$  ayant pour domaine  $\mathbb{R}$  et comme codomaine  $\mathbb{R}$ ;
- (c)  $f : 2^{\mathbb{Z}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$  définie par  $f(E) = E \cup \{0\}$ ;
- (d)  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto (y, -x)$ ;
- (e)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , où

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x + 1 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est impair;} \\ \lfloor x + 2 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est pair.} \end{cases}$$

1.4 Considérez les règles de correspondance suivantes de la fonction  $f$  dont le domaine et le codomaine sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ . Dans chaque cas, donnez le domaine et le codomaine maximal pour que la fonction soit une bijection et calculez l'inverse de la fonction.

- |                           |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(x) = 2x + 3$ ;     | (c) $f(x) = \log_2(x + 4)$ ;     |
| (b) $f(x) = 1/(2x + 3)$ ; | (d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ . |

1.5 Soit  $f$  une fonction injective de  $A$  vers  $B$ . Soient  $S$  et  $T$  deux sous-ensembles de  $A$ . Montrez que

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

Le résultat est-il vrai si  $f$  n'est pas injective.