Solution du devoir 1

1. (35 points) Propositions

   (a) À l'aide de table de vérité ou autrement,

      i. (7 points) déterminez si les propositions $(p \to q) \to r$ et $p \to (q \to r)$ sont logiquement équivalentes;

      Solution: Elles ne le sont pas, comme l'illustre la table ci-bas :

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	**0**	1	**1**
0	0	1	1	**1**	1	**1**
0	1	0	1	**0**	0	**1**
0	1	1	1	**1**	1	**1**
1	0	0	0	**1**	1	**1**
1	0	1	0	**1**	1	**1**
1	1	0	1	**0**	0	**0**
1	1	1	1	**1**	1	**1**

      Par exemple, si $p, q, r = 0$, alors $(p \to q) \to r$ est fausse, mais $p \to (q \to r)$ est vraie.

      ii. (7 points) déterminez si les propositions $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ et $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ sont logiquement équivalentes.

      Solution: Elles le sont :

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
1	1	1	1	**1**	1	**1**
1	1	0	1	**0**	0	**0**
1	0	1	0	**0**	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	**1**
0	1	1	0	**0**	1	**0**
0	1	0	0	**1**	0	**1**
0	0	1	1	**1**	0	**1**
0	0	0	1	**0**	1	**0**

      Comme les colonnes correspondant aux deux propositions sont identiques, on en conclut qu'elles sont logiquement équivalentes.

   (b) Soit les quatre propositions quantifiées suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
Q_1 & : & \exists x \exists y P(x,y) \\
Q_2 & : & \forall x \exists y P(x,y) \\
Q_3 & : & \exists y \forall x P(x,y) \\
Q_4 & : & \forall x \forall y P(x,y)
\end{array}
$$

i. (10 points) Soit $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, l'univers du discours. Trouvez un prédicat $P(x, y)$ tel que

α) Q_1 est fausse;

> **Solution:** $P(x, y) : (x+y)^2 < 0$. Puisque $(x+y)^2$ n'est jamais négatif, il n'y a aucune paire de valeurs de x et y qui peuvent rendre le prédicat vrai.

β) Q_1 est vraie mais Q_2 est fausse;

> **Solution:** $P(x, y) : xy > 0$. Q_1 est vraie car, entre autres, $P(1, 2)$ est vrai, mais Q_2 est fausse, car $P(0, y)$ est faux, peu importe la valeur de y.

γ) Q_2 est vraie mais Q_3 est fausse;

> **Solution:** $P(x, y) : x+y = 0$. Q_2 est vraie, car $P(x, -x)$ est vrai pour toute valeur de x, mais Q_3 est fausse, car pour toute valeur de x, une seule valeur de y rend le prédicat vrai.

δ) Q_3 est vraie mais Q_4 est fausse;

> **Solution:** $P(x, y) : xy = 0$. Q_3 est vraie car $P(0, y)$ est vrai pour toute valeur de y. Q_4 est fausse car $P(1, 2)$ est faux.

ϵ) Q_4 est vraie.

> **Solution:** $P(x, y) : (x+y)^2 \geq 0$. Q_4 est vraie car $(x+y)^2$ est toujours ≥ 0.

Vous devez justifier toutes vos réponses. Les cinq sous-questions sont indépendantes les unes des autres.

ii. Démontrez que si l'univers du discours

α) (5 points) est non vide alors les trois propositions $Q_4 \to Q_3$, $Q_3 \to Q_2$ et $Q_2 \to Q_1$ sont toutes vraies;

> **Solution:**
> $\mathbf{Q_4 \to Q_3}$: Supposons que Q_4 est vraie. Alors $\forall x \forall y P(x, y)$ est vraie, ce qui est équivalent à $\forall y \forall x P(x, y)$. Comme $U \neq \emptyset$, on a qu'il existe au moins une valeur de $y \in U$ telle que $\forall x P(x, y)$ est vraie. Autrement

dit, $\exists y \forall x P(x,y)$.
$\mathbf{Q_3} \rightarrow \mathbf{Q_2}$: Supposons que Q_3 est vraie. Alors $\exists y \forall x P(x,y)$ est vraie. Il existe donc un $y \in U$ tel que $\forall x P(x,y)$ est vraie. Appelons cet élément y_0 (un tel élément existe puisque $U \neq \emptyset$), c'est-à-dire que la proposition $\forall x P(x,y_0)$ est vraie. On a donc que $\forall x \exists y P(x,y)$ est vraie (puisqu'il suffit de prendre $y = y_0$).
$\mathbf{Q_2} \rightarrow \mathbf{Q_1}$: Supposons que Q_2 est vraie. Alors $\forall x \exists y P(x,y)$ est vraie. Comme $U \neq \emptyset$, il existe au moins un élément de U (appelons-le x_0) tel que $\exists y P(x_0,y)$ est vraie, c'est-à-dire que $\exists x \exists y P(x,y)$ est vraie (il suffit de prendre $x = x_0$).

β) (6 points) est vide alors Q_2 et Q_4 sont vraies et Q_1 et Q_3 sont fausses quelque soit le prédicat.

Solution:
$\mathbf{Q_1}$: Notons que $\exists x \exists y P(x,y)$ est logiquement équivalente à $\exists x (\exists y P(x,y))$. Or, la proposition $\exists y P(x,y)$ est toujours fausse, puisque $U = \emptyset$ et donc un tel y ne peut exister. Par conséquent, Q_1 est logiquement équivalente à $\exists x faux$, qui est fausse.
$\mathbf{Q_2}$: La proposition $\forall x \exists y P(x,y)$ est logiquement équivalente à $\forall x (\exists y P(x,y))$. Or, $U = \emptyset$, de sorte que $\forall x (\exists y P(x,y))$ est vraie, peu importe la valeur de $\exists y P(x,y)$ (qui est par ailleurs fausse). Ainsi, Q_2 est vraie.
En suivant un raisonnement similaire, on constate que $\mathbf{Q_3}$ est fausse, puisqu'elle commence par $\exists y$ qui donnera un résultat faux peu importe ce qui le suit. Puis, $\mathbf{Q_4}$ est toujours vraie, car elle commence par $\forall x$, qui donnera un résultat vrai, peu importe ce qui le suit.

2. (30 points) ENSEMBLES

(a) Soit $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ l'ensemble universel, $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{1,3,5\}$.

i. (2 points) Donnez la liste de tous les éléments de l'ensemble $(A \cup B) \times (A \cap B)$.

Solution: $(1,1),(2,1),(3,1),(5,1),(1,3),(2,3),(3,3),(5,3)$

ii. (3 points) Donnez la liste de tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(U - (A \oplus B))$.

Solution: On a $A \oplus B = \{2,5\}$ et $U - (A \oplus B) = \{1,3,4,6\}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(U-(A\oplus B)) &= \{\emptyset,\{1\},\{3\},\{4\},\{6\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,6\},\{3,4\},\\ &\quad \{3,6\},\{4,6\},\{1,3,4\},\{1,3,6\},\{1,4,6\},\{3,4,6\},\\ &\quad \{1,3,4,6\}\}\end{aligned}$$

(b) (10 points) Montrez par la méthode de votre choix que

$$[(A \cup C) - B] \cup [B - (A \cup C)] = (A - B) \cup [\overline{A} \cap ((B - C) \cup (C - B))].$$

Solution: Dans un premier temps, nous allons montrer l'identité suivante

$$[A \cap \overline{B}] \cup [C \cap \overline{B}] = [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap C],$$

qui nous sera utile. En effet, puisque $A \cap \overline{B} \cap C$ est un sous-ensemble de $A \cap \overline{B}$, nous avons

$$\begin{aligned} [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap C] &= [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap C] \cup [A \cap \overline{B} \cap C] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [(\overline{A} \cup A) \cap (\overline{B} \cap C)] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [U \cap (\overline{B} \cap C)] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{B} \cap C], \end{aligned}$$

tel qu'annoncé.

Maintenant, remarquons que $E - F = E \cap \overline{F}$ peu importe E et F. D'une part,

$$\begin{aligned} [(A \cup C) - B] \cup [B - (A \cup C)] &= [(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup [B \cap \overline{A \cup C}] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [C \cap \overline{B}] \cup [B \cap \overline{A} \cap \overline{C}]. \end{aligned}$$

en distribuant et par la loi de Morgan. En utilisant l'identité démontrée plus haut, on en conclut que

$$\begin{aligned} [(A \cup C) - B] \cup [B - (A \cup C)] &= [(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup [B \cap \overline{A \cup C}] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap C \cap \overline{B}] \cup [B \cap \overline{A} \cap \overline{C}]. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (A - B) \cup [\overline{A} \cap ((B - C) \cup (C - B))] &= (A \cap \overline{B}) \cup [\overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B}))] \\ &= [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap B \cap \overline{C}] \cup [\overline{A} \cap C \cap \overline{B}]. \end{aligned}$$

On voit que les deux expressions sont identiques, ce qui termine la démonstration.

(c) (5 points) Donnez une formule pour $|A \oplus B|$ en fonction de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$ uniquement. Démontrez cette formule (*Aide* : Servez-vous du fait que si U est l'ensemble universel alors $|\overline{A}| = |U| - |A|$)

Solution: On a

$$|A \oplus B| \quad = \quad |(A \cup B) - (A \cap B)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |A \cup B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - 2|A \cap B|.
\end{aligned}
$$

(d) (10 points) Démontrez l'équivalence $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$

Solution: Supposons que $A \subseteq B$ et montrons que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Alors $x \in A$ et $x \in \overline{B}$. Or, $A \subseteq B$, ce qui entraîne $x \in B$, contredisant $x \in \overline{B}$. Réciproquement, supposons que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et supposons que $x \in A$. Clairement, on ne peut avoir $x \in \overline{B}$, sinon on aurait $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, $x \notin \overline{B}$, c'est-à-dire que $x \in B$. On a montré que $x \in A$ implique $x \in B$, peu importe x, ce qui signifie que $A \subseteq B$.

3. (40 points) Fonctions

(a) (20 points) Pour chacune des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant l'ensemble des nombres réels),

i. $f(x) = 2^x$,

Solution: La fonction est injective. En effet, supposons que $2^x = 2^y$. Alors $\log_2 2^x = \log_2 2^y$, ce qui entraîne $x = y$. La fonction n'est pas surjective car -1 n'a pas de préimage dans $\mathbb{R}$. En effet, on remarque que $2^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}_+^*$. La réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

ii. $f(x) = x^3$,

Solution: La fonction est injective. En effet, supposons que $x^3 = y^3$. Alors $x^3 - y^3 = 0$, c'est-à-dire $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$. Or, $x^2+xy+y^2 \geq 0$ peu importe x et y, ce qui entraîne $x = y$. La fonction est également surjective car chaque $b \in \mathbb{R}$ a une préimage $a \in \mathbb{R}$ qui est $a = b^{\frac{1}{3}}$. On peut donc prendre $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$. La réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

iii. $f(x) = x^2$,

Solution: La fonction n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$. La fonction n'est pas surjective car -1 n'a pas de préimage $a \in \mathbb{R}$. On peut prendre $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_+$. La réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

iv. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$,

Solution: La fonction n'est pas injective car $f(0) = f(-1) = 0$. Par contre, elle est surjective car chaque $b \in \mathbb{R}$ a une préimage $a \in \mathbb{R}$. En effet, il suffit de prendre, $a = b$ si $b \geq 0$, et de prendre $a = b - 1$ sinon. Remarquons que l'injectivité ne pose problème que sur l'intervalle $[-1, 0]$. Il suffit alors de prendre $A = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ et $B = \mathbb{R}$. La réciproque de f est $f^{-1} : \mathbb{R} \to A$ définie par

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez si elle est injective et si elle est surjective. Justifiez vos réponses. Ensuite, pour chacune des quatre fonctions, trouvez le plus grand sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ et le plus grand sous ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $\{x \mid x > 1\} \subseteq A$ et $\{x|x > 1\} \subseteq B$ et tels que $f : A \to B$ soit inversible, et donnez sa réciproque, y compris son domaine et son codomaine.

(b) (20 points) Soit $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 3x + 2$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elles sont inversibles (vous n'êtes pas tenu.e.s de le démontrer). Trouvez les fonctions $(f \circ g)^{-1}(y)$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(y)$ et $(g^{-1} \circ f^{-1})(y)$. En général, si f et g sont des fonctions inversibles, trouvez l'inverse de $f \circ g$ en fonction de f^{-1} et g^{-1} et donnez, avec justifications, sa réciproque.

Solution: Calculons d'abord f^{-1}. Posons $y = 2x + 3$. Alors $x = (y - 3)/2$, ce qui entraîne

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

De la même façon, posons $y = 3x + 2$. Alors $x = (y - 2)/3$, ce qui entraîne que

$$g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}.$$

Aussi,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7.$$

Posons $y = 6x + 7$. Alors $x = (y - 7)/6$, ce qui entraîne

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-7}{6}.$$

Aussi,

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) \quad = \quad f^{-1}(g^{-1}(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= f^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right) \\
&= \frac{\frac{x-2}{3}-3}{2} \\
&= \frac{x-2-9}{6} \\
&= \frac{x-11}{6}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
&= g^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) \\
&= \frac{\frac{x-3}{2}-2}{3} \\
&= \frac{x-3-4}{6} \\
&= \frac{x-7}{6}.
\end{aligned}
$$

Il semblerait donc que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Montrons que c'est vrai en général. Soit x un élément quelconque du domaine de f^{-1}. Posons $y = f^{-1}(x)$ et $z = g^{-1}(y)$. Alors d'une part,

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(y) = z.$$

D'autre part,

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(g(g^{-1}(y))) = f(y) = f(f^{-1}(x)) = x,$$

ce qui montre que $(f \circ g)^{-1}(x) = z$. Comme x est quelconque, on en conclut que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

4. (25 points) Suites et arithmétique modulaire

Soient k et m deux entiers, où $m > 0$. On définit une suite $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $s_i = (ki) \bmod m$.

(a) (10 points) Calculez les $2m$ premiers termes de la suite $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si

i. $k = 1$ et $m = 8$;

Solution:

$$\begin{aligned}
s_0 &= (1 \cdot 0) \bmod 8 = 0 & s_8 &= (1 \cdot 8) \bmod 8 = 0\\
s_1 &= (1 \cdot 1) \bmod 8 = 1 & s_9 &= (1 \cdot 9) \bmod 8 = 1\\
s_2 &= (1 \cdot 2) \bmod 8 = 2 & s_{10} &= (1 \cdot 10) \bmod 8 = 2\\
s_3 &= (1 \cdot 3) \bmod 8 = 3 & s_{11} &= (1 \cdot 11) \bmod 8 = 3\\
s_4 &= (1 \cdot 4) \bmod 8 = 4 & s_{12} &= (1 \cdot 12) \bmod 8 = 4\\
s_5 &= (1 \cdot 5) \bmod 8 = 5 & s_{13} &= (1 \cdot 13) \bmod 8 = 5\\
s_6 &= (1 \cdot 6) \bmod 8 = 6 & s_{14} &= (1 \cdot 14) \bmod 8 = 6\\
s_7 &= (1 \cdot 7) \bmod 8 = 7 & s_{15} &= (1 \cdot 15) \bmod 8 = 7
\end{aligned}$$

ii. $k = 2$ et $m = 8$;

Solution:

$$\begin{aligned}
s_0 &= (1 \cdot 0) \bmod 8 = 0 & s_8 &= (1 \cdot 16) \bmod 8 = 0\\
s_1 &= (1 \cdot 2) \bmod 8 = 2 & s_9 &= (1 \cdot 18) \bmod 8 = 2\\
s_2 &= (1 \cdot 4) \bmod 8 = 4 & s_{10} &= (1 \cdot 20) \bmod 8 = 4\\
s_3 &= (1 \cdot 6) \bmod 8 = 6 & s_{11} &= (1 \cdot 22) \bmod 8 = 6\\
s_4 &= (1 \cdot 8) \bmod 8 = 0 & s_{12} &= (1 \cdot 24) \bmod 8 = 0\\
s_5 &= (1 \cdot 10) \bmod 8 = 2 & s_{13} &= (1 \cdot 26) \bmod 8 = 2\\
s_6 &= (1 \cdot 12) \bmod 8 = 4 & s_{14} &= (1 \cdot 28) \bmod 8 = 4\\
s_7 &= (1 \cdot 14) \bmod 8 = 6 & s_{15} &= (1 \cdot 30) \bmod 8 = 6
\end{aligned}$$

iii. $k = 3$ et $m = 8$;

Solution:

$$\begin{aligned}
s_0 &= (1 \cdot 0) \bmod 8 = 0 & s_8 &= (1 \cdot 24) \bmod 8 = 0\\
s_1 &= (1 \cdot 3) \bmod 8 = 3 & s_9 &= (1 \cdot 27) \bmod 8 = 3\\
s_2 &= (1 \cdot 6) \bmod 8 = 6 & s_{10} &= (1 \cdot 30) \bmod 8 = 6\\
s_3 &= (1 \cdot 9) \bmod 8 = 1 & s_{11} &= (1 \cdot 33) \bmod 8 = 1\\
s_4 &= (1 \cdot 12) \bmod 8 = 4 & s_{12} &= (1 \cdot 36) \bmod 8 = 4\\
s_5 &= (1 \cdot 15) \bmod 8 = 7 & s_{13} &= (1 \cdot 39) \bmod 8 = 7\\
s_6 &= (1 \cdot 18) \bmod 8 = 2 & s_{14} &= (1 \cdot 42) \bmod 8 = 2\\
s_7 &= (1 \cdot 21) \bmod 8 = 5 & s_{15} &= (1 \cdot 45) \bmod 8 = 5
\end{aligned}$$

iv. $k = 4$ et $m = 8$;

Solution:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= (1 \cdot 0) \bmod 8 = 0 & s_8 &= (1 \cdot 32) \bmod 8 = 0 \\
s_1 &= (1 \cdot 4) \bmod 8 = 4 & s_9 &= (1 \cdot 36) \bmod 8 = 4 \\
s_2 &= (1 \cdot 8) \bmod 8 = 0 & s_{10} &= (1 \cdot 40) \bmod 8 = 0 \\
s_3 &= (1 \cdot 12) \bmod 8 = 4 & s_{11} &= (1 \cdot 44) \bmod 8 = 4 \\
s_4 &= (1 \cdot 16) \bmod 8 = 0 & s_{12} &= (1 \cdot 48) \bmod 8 = 0 \\
s_5 &= (1 \cdot 20) \bmod 8 = 4 & s_{13} &= (1 \cdot 52) \bmod 8 = 4 \\
s_6 &= (1 \cdot 24) \bmod 8 = 0 & s_{14} &= (1 \cdot 56) \bmod 8 = 0 \\
s_7 &= (1 \cdot 28) \bmod 8 = 4 & s_{15} &= (1 \cdot 60) \bmod 8 = 4
\end{aligned}
$$

v. $k = 5$ et $m = 8$;

Solution:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= (1 \cdot 0) \bmod 8 = 0 & s_8 &= (1 \cdot 40) \bmod 8 = 0 \\
s_1 &= (1 \cdot 5) \bmod 8 = 5 & s_9 &= (1 \cdot 45) \bmod 8 = 5 \\
s_2 &= (1 \cdot 10) \bmod 8 = 2 & s_{10} &= (1 \cdot 50) \bmod 8 = 2 \\
s_3 &= (1 \cdot 15) \bmod 8 = 7 & s_{11} &= (1 \cdot 55) \bmod 8 = 7 \\
s_4 &= (1 \cdot 20) \bmod 8 = 4 & s_{12} &= (1 \cdot 60) \bmod 8 = 4 \\
s_5 &= (1 \cdot 25) \bmod 8 = 1 & s_{13} &= (1 \cdot 65) \bmod 8 = 1 \\
s_6 &= (1 \cdot 30) \bmod 8 = 6 & s_{14} &= (1 \cdot 70) \bmod 8 = 6 \\
s_7 &= (1 \cdot 35) \bmod 8 = 3 & s_{15} &= (1 \cdot 75) \bmod 8 = 3
\end{aligned}
$$

(b) (5 points) On dit d'une suite $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ qu'elle est *périodique* s'il existe un entier strictement positif p tel que $a_i = a_{i+p}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Si un tel entier p existe, alors le plus petit d'entre eux est alors appelé *période* de la suite. Pour chacun des exemples de la partie (a), indiquez si la suite est périodique et donnez sa période le cas échéant.

Solution: Elles sont toutes périodiques. Dans l'ordre, les périodes sont 8, 4, 8, 2 et 8.

(c) (10 points) Donnez une formule générale pour la période de la suite $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en fonction de k et de m.

Solution: On constate que la période est donnée par $m/\text{pgcd}(k, m)$. Démontronsle. Supposons que $p > 0$ est un entier vérifiant $s_i = s_{i+p}$. Alors $ki \equiv k(i + p) \pmod{m}$, ce qui entraîne $ki \equiv ki + kp \pmod{m}$ et alors $kp \equiv 0 \pmod{m}$. On en déduit alors que kp est un multiple de m. Or, kp est aussi un multiple de k. Pour que p soit minimal, il faut que kp soit minimal. Prenons $kp = \text{ppcm}(k, m)$. Alors

$$p = \frac{\text{ppcm}(k,m)}{k} = \frac{km}{k\text{pgcd}(k,m)} = \frac{m}{\text{pgcd}(k,m)}.$$

5. (20 points) Sommes et divisibilité

   (a) (12 points) Simplifiez le plus possible les sommes suivantes :

   i. $\sum_{i=0}^{100}(3i+4)$

   Solution:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{100}(3i+4) &= 3\sum_{i=0}^{100} i + \sum_{i=0}^{100} 4 \\ &= 3\frac{100(100+1)}{2} + 101 \cdot 4 \\ &= 15554.\end{aligned}$$

   ii. $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{5} \text{pgcd}(i,j)$

   Solution:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{5} \text{pgcd}(i,j) &= \text{pgcd}(1,2) + \text{pgcd}(1,3) + \text{pgcd}(1,4) + \text{pgcd}(1,5) \\ &\quad + \text{pgcd}(2,3) + \text{pgcd}(2,4) + \text{pgcd}(2,5) + \text{pgcd}(3,4) \\ &\quad + \text{pgcd}(3,5) + \text{pgcd}(4,5) \\ &= 1+1+1+1+1+2+1+1+1+1 \\ &= 11.\end{aligned}$$

   iii. $\sum_{i=1}^{n}(2^i + i + 2)$

   Solution:

$$\sum_{i=1}^{n}(2^i + i + 2) = \sum_{i=1}^{n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{n+1} - 1 - 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\
&= 2^{n+1} + \frac{-4 + n^2 + n + 4n}{2} \\
&= 2^{n+1} + \frac{n^2 + 5n - 4}{2}.
\end{aligned}
$$

iv. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ij)$

Solution:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ij) &= \sum_{i=1}^{n} i \left(\sum_{j=1}^{m} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \\
&= \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)
\end{aligned}
$$

Remarque : Par “simplifier”, on entend que vous devez exprimer le résultat sans ... ni le symbole $\sum$.

(b) (8 points) Étant donné un nombre entier positif n, dénotons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs stricts de n, c'est-à-dire

$$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divise } n \text{ et } 1 \leq d < n\}.$$

On dit qu'un nombre naturel est *déficient*, *parfait* ou *abondant* selon que

$$\sum_{d \in D(n)} d < n, \quad \sum_{d \in D(n)} d = n \quad \text{ou} \quad \sum_{d \in D(n)} d > n.$$

Indiquez si les nombres 24, 26, 28 et 30 sont déficients, parfaits ou abondants.

Solution: On a

$$
\begin{aligned}
D(24) &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\} \\
D(26) &= \{1, 2, 13\} \\
D(28) &= \{1, 2, 4, 7, 14\}
\end{aligned}
$$

$$D(30) \quad = \quad \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{d \in D(24)} d &= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 \\
\sum_{d \in D(26)} d &= 1 + 2 + 13 = 16 \\
\sum_{d \in D(28)} d &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 \\
\sum_{d \in D(30)} d &= 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42,
\end{aligned}$$

ce qui montre que 24 et 30 sont abondants, 26 est déficient et 28 est parfait.