<u>Solution du devoir 2</u>

1. (24 points) ALGORITHMES

L'algorithme suivant trie un tableau de nombres entiers en ordre croissant.

procedure TRISÉLECTION(T : tableau d'entiers)
    pour $i \leftarrow 0, 1, \ldots, n-1$ **faire**
        $pos \leftarrow i$
        pour $j \leftarrow i+1, i+2, \ldots, n-1$ **faire**
            si $T[j] < T[pos]$ **alors**
                $pos \leftarrow j$
            fin si
        fin pour
        $temp \leftarrow T[i]$
        $T[i] \leftarrow T[pos]$
        $T[pos] \leftarrow temp$
    fin pour
fin procedure

(a) (8 points) Faites la trace de cet algorithme avec le tableau

$$T = [2, 4, 2, 3, 2, 1].$$

La clarté et la concision de la présentation de votre trace sera évaluée.

Solution: On présente la trace sous forme de tableaux, qu'on lit colonne par colonne.
Quand $i = 0$, on obtient

i	0					
pos	0	0	0	0	0	5
j	1	2	3	4	5	6
$T[j]$	4	2	3	2	1	
$T[pos]$	2	2	2	2	2	
$T[j] < T[pos]$	F	F	F	F	V	

On échange ensuite $T[0]$ et $T[5]$, de sorte que

$$T = [1, 4, 2, 3, 2, 2].$$

Puis $i = 1$ et on obtient

i	1				
pos	1	2	2	2	2
j	2	3	4	5	6
$T[j]$	2	3	2	2	
$T[pos]$	4	2	2	2	
$T[j] < T[pos]$	V	F	F	F	

Cette fois, on échange $T[1]$ et $T[2]$, ce qui donne

$$T = [1, 2, 4, 3, 2, 2].$$

Pour $i = 2$ maintenant :

i	2			
pos	2	3	4	4
j	3	4	5	6
$T[j]$	3	2	2	
$T[pos]$	4	3	2	
$T[j] < T[pos]$	V	V	F	

Il faut permuter $T[2]$ et $T[4]$:

$$T = [1, 2, 2, 3, 4, 2].$$

Le cas $i = 3$:

i	3		
pos	3	3	5
j	4	5	6
$T[j]$	4	2	
$T[pos]$	3	3	
$T[j] < T[pos]$	F	V	

On échange $T[3]$ et $T[5]$, ce qui donne

$$T = [1, 2, 2, 2, 4, 3].$$

Puis finalement $i = 4$:

i	4	
pos	4	5
j	5	6
$T[j]$	2	
$T[pos]$	4	
$T[j] < T[pos]$	V	

on permute $T[4]$ et $T[5]$ et le tableau est enfin trié

$$T = [1, 2, 2, 2, 4, 3].$$

(b) (8 points) Combien de fois la comparaison $T[j] < T[pos]$ sera-t-elle exécutée pour un tableau de taille n ? Donnez d'abord le nombre exact de comparaisons en fonction de n puis simplifiez cette formule à une bonne estimation en utilisant la notation $\mathcal{O}$.

Solution: À noter que la comparaison est effectuée peu importe le contenu du tableau. Il suffit en fait de compter le nombre de tours de boucle qui sont effectués.

Le corps de la boucle intérieure est exécuté $n - i - 1$ fois et le corps de la boucle extérieur est exécuté n fois. La comparaison $T[j] < T[pos]$ est donc effectuée

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n - i - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = \mathcal{O}(n^2)$$

fois.

(c) (8 points) Donnez une bonne estimation à l'aide de la notation $\mathcal{O}$ pour le nombre total d'opérations requises pour exécuter cet algorithme sur un tableau de taille n. Est-il vraiment nécessaire de connaître le nombre exact de comparaisons pour faire cette estimation ? Justifiez votre réponse.

> **Solution:** Comme toutes les opérations de l'algorithme s'effectuent en temps constant, le nombre total d'opérations requises est $\mathcal{O}(n^2)$. Le nombre de comparaisons est donc un indicateur suffisant de la complexité, mais il n'est pas nécessaire de le connaître de façon exacte, seulement d'avoir son ordre de grandeur.

2. (20 points) Complexité asymptotique

(a) (8 points) En utilisant la définition de $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, montrez que

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^4 = O(n^5).$$

> **Solution:** On a
> $$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^4 \leq \sum_{i=1} n^4 = n^5,$$
> pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, il suffit de prendre $C = 1$ et $k = 1$ dans la définition de la notation $\mathcal{O}$ pour conclure que $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^4 = \mathcal{O}(n^5)$.

(b) (6 points) Trouvez un estimé O (borne la plus serrée) pour la fonction

$$f(n) = (n^2+2)\log(n^3) + (n^3+2n^2)\log n + n.$$

> **Solution:** On a
> $$\begin{aligned} f(n) &= (n^2+2)\log(n^3) + (n^3+2n^2)\log n + n \\ &= 3(n^2+2)\log(n) + (n^3+2n^2)\log n + n. \end{aligned}$$
> Or, $3(n^2+2)\log(n) = \mathcal{O}(n^2\log n)$, $(n^3+2n^2)\log n = \mathcal{O}(n^3\log n)$, de sorte que
> $$f(n) = \mathcal{O}(\max\{n^2\log n, n^3\log n, n\}) = \mathcal{O}(n^3\log n).$$

(c) (6 points) Donnez un exemple de fonction $f(n)$ telle que $f(n) = O(1)$ et pour laquelle

$$\forall n > 100, f(n) > 999999 \text{ et } \forall n \leq 100, f(n) > 999.$$

Solution: Il suffit de prendre n'importe quelle fonction constante qui prend des valeurs plus grandes que 999999 et 999. On peut par exemple choisir $f(n) = 1\ 000\ 000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (30 points) Définitions récursives et induction

   (a) (15 points) Soit Σ un alphabet et f une fonction sur Σ^* définie comme suit :

$$f : \Sigma^* \to \Sigma^*, \quad f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad f(uv) = f(u)vv.$$

Montrez, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout $u \in \Sigma^*$ on a $|f(u)| = 2|u|$ où $|f(u)|$ et $|u|$ désignent les longueurs des mots $f(u)$ et u respectivement. Ici, ε désigne le mot vide.

Solution: La démonstration est faite par induction sur $|u| = n$.
Cas de base. Si $n = 0$, alors $u = \varepsilon$. On a donc $f(u) = f(\varepsilon) = \varepsilon$. Par conséquent,

$$|f(u)| = |f(\varepsilon)| = |\varepsilon| = 0 = 2 \cdot 0 = 2|\varepsilon| = 2|u|.$$

Hypothèse d'induction. Supposons que pour tout mot u' de longueur n, on ait $|f(u')| = 2|u'|$.
Étape inductive. Soit u un mot de longueur $n+1$. Alors il existe une lettre a et un préfixe p de u de longueur n tel que $u = pa$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|f(u)| &= |f(pa)| \\
&= |f(p)aa| \quad \text{(par définition de } f\text{)} \\
&= |f(p)| + 2 \quad \text{(car } a \text{ est une lettre)} \\
&= 2|p| + 2 \quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= 2(|p| + 1) \\
&= 2|u|,
\end{aligned}$$

tel que voulu.

   (b) Soit la suite $\{a_n\}$ définie récursivement de la façon suivante pour $n \geq 1$:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 3a_{n-1} + 2.$$

      i. (5 points) Donnez une formule explicite (non récursive) pour a_n.

Solution: Calculons les premiers termes de la suite. On obtient

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 3a_0 + 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\
a_2 &= 3a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \\
a_3 &= 3a_2 + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26
\end{aligned}$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \cdot 26 + 2 = 80.$$

On constate que la suite ressemble beaucoup à celle des premières puissances de 3 : 1, 3, 9, 27, 81, ... Il est donc naturel de conjecturer que de façon générale, on a

$$a_n = 3^n - 1.$$

ii. (10 points) En utilisant l'induction mathématique, montrez que votre formule est bien valide pour tout $n \geq 0$.

Solution: On doit montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n = 3^n - 1$.
Cas de base. Si $n = 0$, alors on obtient

$$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = a_0.$$

Hypothèse d'induction. On suppose que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n = 3^n - 1$.
Étape inductive. On doit vérifier que la formule est valide à l'indice $n+1$. Or,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + 2 \quad \text{(par la définition récursive)} \\ &= 3(3^n - 1) + 2 \quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= 3^{n+1} - 3 + 2 \\ &= 3^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

4. (20 points) Algorithmes récursifs

Étant donné un entier positif n, on dit que la suite finie $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est un *partage* de n en k parts si

(i) $n_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$,
(ii) $n_i \geq n_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$ et
(iii) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Par exemple, $(5, 3, 2, 2, 1)$ est un partage de 13 en 5 parts puisque les éléments sont strictement positifs, en ordre décroissant (pas nécessairement strict) et

$$5 + 3 + 2 + 2 + 1 = 13.$$

On a aussi que (13) est un partage de 13 en 1 part.

(a) (6 points) Donnez les 11 partages du nombre 6.

Solution: Les partages sont

(6)	$(3, 3)$	$(2, 2, 1, 1)$
$(5, 1)$	$(3, 2, 1)$	$(2, 1, 1, 1, 1)$
$(4, 2)$	$(3, 1, 1, 1)$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
$(4, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$	

(b) (14 points) On aimerait écrire un algorithme qui calcule la liste de tous les partages d'un nombre donné n. Il semble difficile de le faire directement, mais il existe une façon de le faire de façon récursive.

La première idée est d'introduire un paramètre supplémentaire qui indique le *nombre de parts* qu'on souhaite dans le partage. Plus précisément, on aimerait implémenter une fonction Partages(n, k) qui retourne une liste de tous les partages du nombre n en **exactement** k parts. Par exemple, on s'attend à ce que Partages$(4, 2)$ retourne la liste $[(3, 1), (2, 2)]$, puisque les seuls partages de 4 en exactement 2 parts sont $(3, 1)$ et $(2, 2)$.

En introduisant ce paramètre supplémentaire, il est maintenant plus facile de formuler le problème de façon récursive. En effet, un partage d'un nombre n en exactement k parts peut être obtenu de 2 façons :

(i) Soit il est obtenu à partir d'un partage de $n - 1$ en au plus $k - 1$ parts, puis on lui ajoute une part de 1;

(ii) Soit il est obtenu à partir d'un partage de $n - k$ en exactement k parts, puis on ajoute 1 à chacune de ces k parts.

Écrivez une fonction récursive qui retourne une liste de tous les partages du nombre n en exactement k parts. Vous pouvez supposer que la syntaxe et les fonctions suivantes sont valides et déjà implémentées :

- $L \leftarrow [x, y]$ crée une liste avec les valeurs x, y (vous pouvez évidemment mettre moins ou plus que 2 valeurs) et la place dans la variable L.
- $L \leftarrow [\ ]$ crée une liste vide.
- L.Ajouter(x) ajoute la valeur x à la fin de la liste L. Par exemple si $L = [x, y]$ et que vous faites L.Ajouter(z), alors vous obtiendrez la liste $[x, y, z]$.
- $p \leftarrow$ Partage$([3, 2, 1])$ crée le partage $(3, 2, 1)$ et le place dans la variable p.
- $p[i] \leftarrow y$ modifie la i-ème valeur du partage p. Par exemple, si p est le partage $(3, 2, 1)$, alors $p[0] \leftarrow 4$ transforme le partage en $(4, 2, 1)$ (les indices commencent à 0).

Vous êtes fortement encouragés à utiliser le squelette de fonction suivant :

fonction Partages$(n, k$: entiers$)$: liste de partages
    si $n < k$ **alors**
        À compléter ▷ Premier cas de base
    sinon si $k = 1$ **alors**
        À compléter ▷ Deuxième cas de base
    sinon si $k = n$ **alors**
        À compléter ▷ Troisième cas de base
    sinon
        À compléter ▷ Partie récursive
    fin si
    retourner L ▷ On retourne la liste calculée dans une des trois parties
fin fonction

Aussi, il est conseillé de vérifier si votre algorithme est correct en l'implémentant, mais cette implémentation ne sera pas évaluée (il est donc inutile de la joindre à votre devoir).

Solution:

```
fonction PARTAGES(n, k : entiers) : liste de partages
    si n < k alors
        L ← [ ]
    sinon si k = 1 alors
        L ← [PARTAGE([n])]
    sinon si k = n alors
        L′ ← [ ]
        pour i ← 1, 2, . . . , n faire
            L′.AJOUTER(1)
        fin pour
        L ← [PARTAGE(L′)]
    sinon
        L ← [ ]
        L′ ← PARTAGES(n − 1, k − 1)
        pour p ∈ L′ faire
            p[k] ← 1
            L.AJOUTER(p)
        fin pour
        L′ ← PARTAGES(n − k, k)
        pour p ∈ L′ faire
            pour i ← 0, 1, . . . , k − 1 faire
                p[i] ← p[i] + 1
            fin pour
            L.AJOUTER(p)
        fin pour
    fin si
    retourner L
fin fonction
```

Voici la solution en Python (la fonction `append` insère un élément en fin de liste) :

```python
def partages(n, k):
    if n < k:
        return []
    elif k == 1:
        return [[n]]
    elif n == k:
        return [[1] * n]
    else:
        L = partages(n - 1, k - 1)
        P = []
        for p in L:
            p.append(1)
            P.append(p)
        L = partages(n - k, k)
        for p in L:
```

```
            p = [v + 1 for v in p]
            P.append(p)
        return P
```

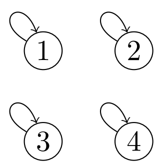
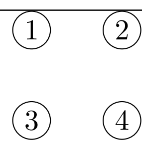
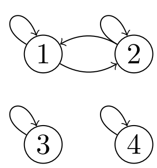
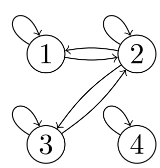
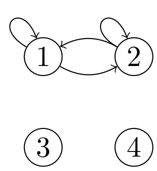
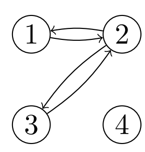
Par exemple, si on fait l'appel de `partages(8,4)`, alors on obtient le résultat suivant :

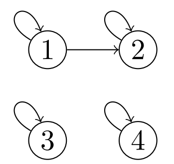
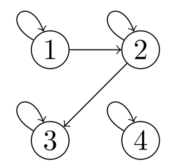
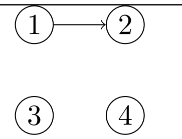
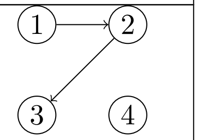
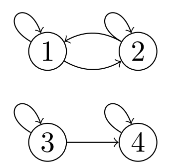
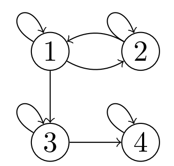
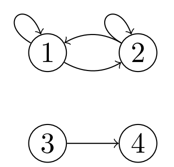
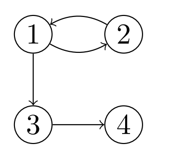
```
>>> from partages import partages
>>> partages(8,4)
[[5, 1, 1, 1], [4, 2, 1, 1], [3, 3, 1, 1], [3, 2, 2, 1], [2, 2, 2, 2]]
```

5. (32 points) RELATIONS

Soit T, la proposition qu'une relation est *transitive*; S, la proposition qu'elle est *symétrique*; A, la proposition qu'elle est *antisymétrique* et R, la proposition qu'elle est *réflexive*. Faites une table de vérité de 16 lignes pour les quatre propositions T, S, A et R. À côté de chaque ligne de votre table, dessinez le graphe d'une relation sur $\{1, 2, 3, 4\}$ qui possède la combinaison de propriétés indiquée par la ligne. Par exemple, si la septième ligne est "vrai, faux, faux, vrai", dessinez le graphe d'une relation qui est transitive et réflexive mais qui n'est ni symétrique ni antisymétrique. Si une telle relation n'existe pas, ne dessinez rien. Vous n'êtes pas tenu.e.s de justifier vos réponses mais vous devriez le faire sur un brouillon pour être sûr.e que vous avez raison !

Solution:

T	S	A	R	Exemple	T	S	A	R	Exemple
V	V	V	V		F	V	V	V	N'existe pas
V	V	V	F		F	V	V	F	N'existe pas
V	V	F	V		F	V	F	V	
V	V	F	F		F	V	F	F	

V	F	V	V		F	F	V	V	
V	F	V	F		F	F	V	F	
V	F	F	V		F	F	F	V	
V	F	F	F		F	F	F	F	

6. (24 points) Relations d'équivalence

Considérons la relation $\to$ sur $\mathbb{Z}^2$ définie comme suit. On écrit $(x, y) \to (x', y')$ si et seulement si

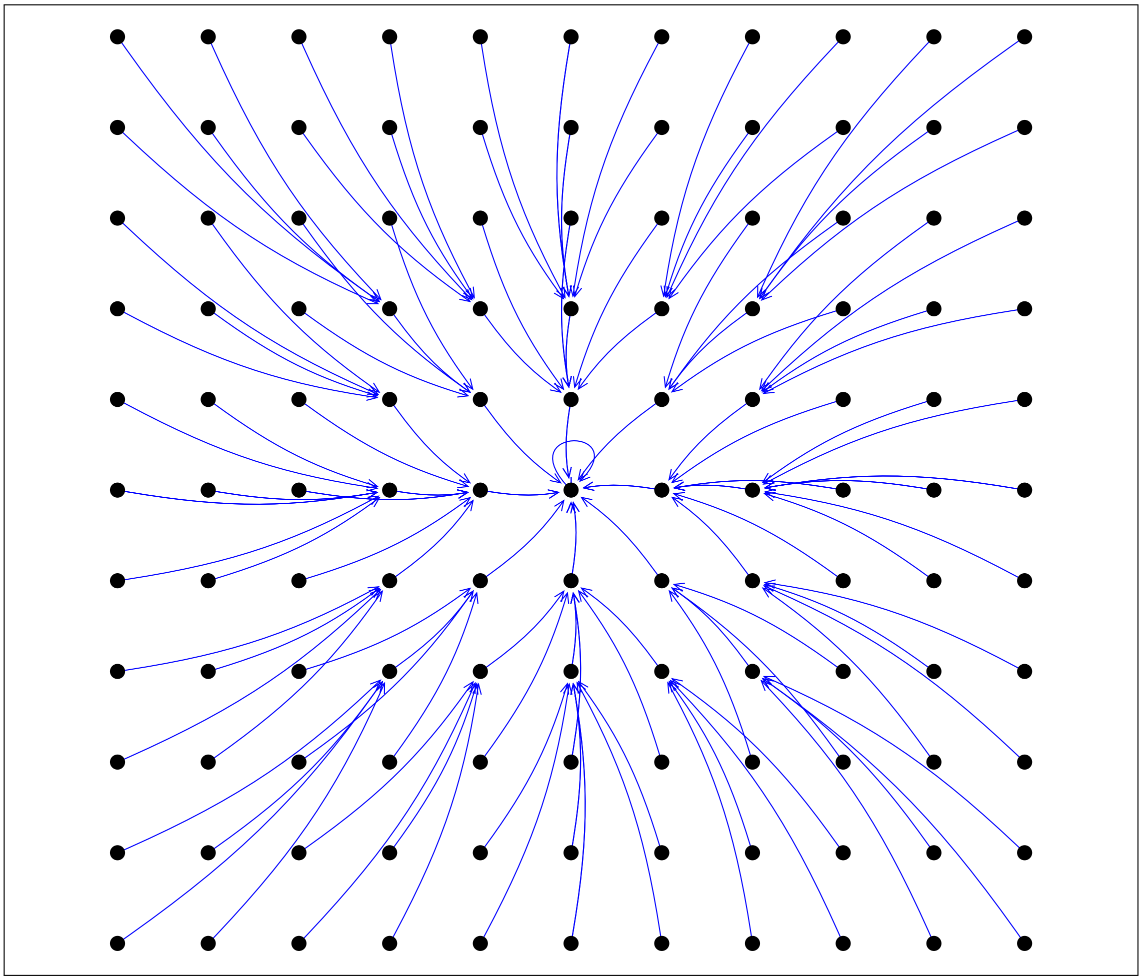
$$(x', y') = \left(\operatorname{signe}(x)\left\lfloor\frac{|x|}{2}\right\rfloor, \operatorname{signe}(y)\left\lfloor\frac{|y|}{2}\right\rfloor\right),$$

où la fonction signe est définie par

$$\operatorname{signe}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z > 0; \\ 0, & \text{si } z = 0; \\ -1, & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

(a) (4 points) Dessinez le graphe de la relation $\to$ en vous restreignant aux couples (a, b) tels que $-5 \leq a, b \leq 5$. Plus précisément, placez les couples (a, b) sur une grille 11×11 en les identifiant par des points, et placez des flèches entre les points qui sont en relation.

Solution: On obtient le dessin suivant :



(b) (8 points) Montrez que $\rightarrow$ est une relation antisymétrique, mais qu'elle n'est ni réflexive ni irréflexive.

Solution: Supposons qu'il existe (x, y) et (x', y') tels que $(x, y) \rightarrow (x', y')$ et $(x', y') \rightarrow (x, y)$. Alors

$$\begin{aligned}
(x', y') &= \left(\text{signe}(x)\left\lfloor \frac{|x|}{2} \right\rfloor, \text{signe}(y)\left\lfloor \frac{|y|}{2} \right\rfloor\right) \\
(x, y) &= \left(\text{signe}(x')\left\lfloor \frac{|x'|}{2} \right\rfloor, \text{signe}(y')\left\lfloor \frac{|y'|}{2} \right\rfloor\right).
\end{aligned}$$

En considérant la première coordonnée, on en déduit donc que

$$\begin{aligned}
x &= \text{signe}\left(\text{signe}(x)\left\lfloor \frac{|x|}{2} \right\rfloor\right) \left\lfloor \frac{|\text{signe}(x)\lfloor |x|/2 \rfloor|}{2} \right\rfloor \\
&= \text{signe}(x)\left\lfloor \frac{|x|}{4} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne $x = 0$. De la même façon, on trouve $y = 0$. Par conséquent, $(x', y') = (0, 0)$ et donc $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que $\rightarrow$ est antisymétrique. Ce n'est pas une relation irréflexive, car $(0,0) \to (0,0)$ et ce n'est pas une relation réflexive puisque, par exemple, $(1,0) \not\to (1,0)$. En effet, sinon, on aurait

$$(1,0) = \left(\text{signe}(1)\left\lfloor \frac{|1|}{2} \right\rfloor, \text{signe}(0)\left\lfloor \frac{|0|}{2} \right\rfloor\right) = (0,0),$$

ce qui est absurde.

(c) (8 points) On définit la relation $\leftrightarrow$ de la façon suivante sur $\mathbb{Z}^2$. On écrit $(x,y) \leftrightarrow (x',y')$ si et seulement s'il existe un couple $(x'',y'') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(x,y) \to (x'',y'')$ et $(x',y') \to (x'',y'')$. Autrement dit, les couples (x,y) et (x',y') sont en relation s'ils pointent vers le même couple (x'',y''). Montrez que la relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Solution: La relation est réflexive, car tout couple $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ pointe vers exactement un couple (x',y') et, en particulier, (x,y) et (x,y) pointent vers le même couple.
La relation est symétrique, car si (x,y) et (x',y') pointent vers un même couple (x'',y''), alors il est vrai que (x',y') et (x,y) pointent vers le couple (x'',y'').
Finalement, si les couples (x,y) et (x',y') pointent vers le même couple et que (x',y') et (x'',y'') pointent vers le même couple, alors on en conclut que (x,y) et (x'',y'') pointent vers le même couple.

(d) (4 points) Reproduisez le dessin fait en (a) et identifiez les classes d'équivalence de la relation $\leftrightarrow$ pour tous les couples (a,b) tels que $-5 \leq a, b \leq 5$. Il suffit d'encercler les sommets qui se trouvent dans une même classe.

Solution: