# Solution de l'examen intra

1. (20 points) PROPOSITIONS

   (a) Considérez les propositions

$$\begin{array}{rcl} F & : & p \vee (p \to (p \wedge q)) \\ G & : & \neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \end{array}$$

   i. (8 points) Est-ce que $F \Leftrightarrow G$ ? Justifiez votre réponse.

**Solution:** Oui, elles sont équivalentes. En fait, il s'agit même de tautologies. On peut le vérifier avec une table de vérité ou avec des équivalences logiques. D'une part,

$$\begin{array}{rcl} p \vee (p \to (p \wedge q)) & \Leftrightarrow & p \vee (\neg p \vee (p \wedge q)) \\ & \Leftrightarrow & (p \vee \neg p) \vee (p \wedge q) \\ & \Leftrightarrow & \mathit{vrai} \vee (p \wedge q) \\ & \Leftrightarrow & \mathit{vrai}. \end{array}$$

D'autre part

$$\begin{array}{rcl} \neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q) & \Leftrightarrow & \neg p \vee (\neg q \vee (p \wedge q)) \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)) \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee ((\neg q \vee p) \wedge \mathit{vrai}) \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee (\neg q \vee p) \\ & \Leftrightarrow & (\neg p \vee p) \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow & \mathit{vrai} \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow & \mathit{vrai}. \end{array}$$

   ii. (2 points) $F$ et $G$ sont-elles des tautologies ? Des contradictions ? Justifiez votre réponse.

**Solution:** Ce sont des tautologies, car elles sont vraies peu importe la valeur de $p$ et de $q$.

(b) Soit $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$ une fonction définie par $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$. Soit $P(x,y)$ le prédicat défini par $P(1,1) = \mathit{vrai}$, $P(1,2) = \mathit{vrai}$, $P(2,1) = \mathit{faux}$ et $P(2,2) = \mathit{faux}$, où l'univers du discours de $x$ et de $y$ est $\{1,2\}$. Évaluez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

i. (5 points) $\forall x \exists y P(x,y)$

> **Solution:** C'est faux. Prenons $x = 2$. Alors il n'existe aucun $y$ tel que $P(x,y)$ soit vrai. En effet, les deux seuls $y$ possibles sont 1 et 2 et on constate que $P(2,1) = P(2,2) = \mathit{faux}$.

ii. (5 points) $\forall x \forall y (P(x,y) \to P(f(x), f(y)))$

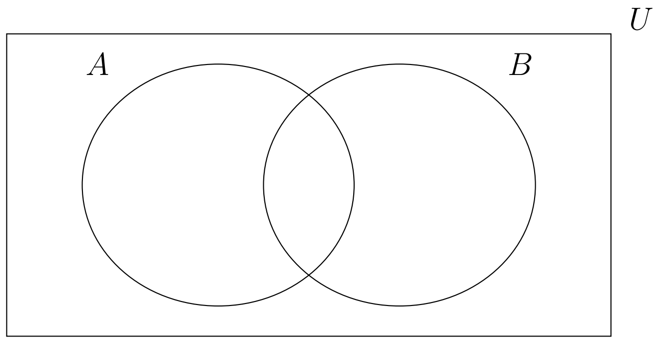
> **Solution:** C'est faux également. Il suffit de produire un contre-exemple. Prenons par exemple $x = y = 1$. Alors $P(x,y) = P(1,1) = \mathit{vrai}$ et $P(f(x), f(y)) = P(f(1), f(2)) = P(2,2) = \mathit{faux}$. Par conséquent, $P(x,y) \to P(f(x), f(y))$ est logiquement équivalent à $P(1,1) \to P(2,2)$ qui est faux.

2. (20 points) Ensembles

   (a) Soient $A$ et $B$ des sous-ensembles d'un ensemble universel fini $U$. Donnez la liste des expressions suivantes en ordre croissant de grandeur :

      i. (5 points) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|U|$, $|\emptyset|$

**Solution:** En étudiant le diagramme de Venn ci-bas




on constate qu'on a les inclusions

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \subseteq U,$$

de sorte que les cardinalités vérifient

$$|\emptyset| \leq |A \cap B| \leq |A| \leq |A \cup B| \leq |U|.$$

      ii. (5 points) $|A - B|$, $|A \oplus B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$, $|\emptyset|$

**Solution:** Le même diagramme nous montre que

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A \oplus B \subseteq A \cup B.$$

De plus, nous savons que $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ (l'inégalité est stricte si l'intersection $A \cap B$ est non vide). On en déduit donc que

$$|\emptyset| \leq |A - B| \leq |A \oplus B| \leq |A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

   (b) Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ et $D = \{1, 3, 4, 5, 7, 10\}$. Décrivez les ensembles suivants en extension (c'est-à-dire en énumérant tous les éléments) :

      i. (1 point) $A \cap B$

i. $A \cap B = \{2, 4\}$

ii. (1 point) $B - D$

ii. $B - D = \{0, 2, 6, 8\}$

iii. (1 point) $A \oplus C$

iii. $A \oplus C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

iv. (1 point) $D \cup C$

iv. $D \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

v. (2 points) $\mathcal{P}(D - (A \oplus B))$

**Solution:** On remarque que

$$\begin{array}{rcl} A \oplus B & = & \{0, 1, 3, 5, 6, 8\} \\ D - (A \oplus B) & = & \{4, 7, 10\} \end{array}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{P}(D - (A \oplus B)) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, \{10\}, \{4, 7\}, \{4, 10\}, \{7, 10\}, \{4, 7, 10\}\}.$$

vi. (2 points) $(A \cap C) \times D$

vi. $(A \cap C) \times D = \emptyset \times D = \emptyset$

vii. (2 points) $(B - (A \cup C \cup D)) \times A$

**Solution:** On a

$$\begin{array}{rcl} A \cup C \cup D & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ B - (A \cup C \cup D) & = & \{0\} \\ B - (A \cup C \cup D) \times A & = & \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)\} \end{array}$$

3. (20 points) Fonctions

(a) Soient $f : A \to A$ et $g : A \to A$ deux fonctions, où $A = \{1, 2, 3, 4\}$, définies par

$$g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4, g(4) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 2.$$

i. (10 points) Trouvez $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f \circ f$ et $f^{-1}$.

**Solution:** On a

$$\begin{aligned}
f \circ g : A \to A \quad &\text{définie par} \quad 1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 4 \\
g \circ f : A \to A \quad &\text{définie par} \quad 1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 3 \\
g \circ g : A \to A \quad &\text{définie par} \quad 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 3 \\
f \circ f \circ f : A \to A \quad &\text{définie par} \quad 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 2.
\end{aligned}$$

Puisque $f$ est bijective, elle est inversible. Son inverse est la fonction $f$ elle-même (on dit alors que $f$ est involutive) :

$$f^{-1} : A \to A \quad \text{définie par} \quad 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 2.$$

ii. (4 points) Montrez que $g$ n'est pas inversible.

**Solution:** Pour que $g$ soit inversible, elle doit être bijective. Or, elle n'est pas injective, car $g(1) = g(4)$, mais $1 \neq 4$ et elle n'est pas surjective puisqu'il n'existe aucun $a$ tel que $g(a) = 1$. Elle est donc ni bijective ni inversible.

(b) (6 points) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La fonction $f$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifiez votre réponse. *Indice : $n$ est pair ou impair.*

**Solution:** Supposons d'abord que $n$ est pair. Alors

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}.$$

D'autre part, si $n$ est impair, alors

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n + \frac{n-1}{2} = \frac{3n-1}{2}.$$

Montrons que $f$ est injective. Supposons donc que $f(m) = f(n)$. Si $m$ et $n$ sont tous deux pairs, alors

$$\frac{3m}{2} = \frac{3n}{2} \Rightarrow m = n.$$

De la même façon, s'ils sont tous deux impairs, on a plutôt

$$\frac{3m-1}{2} = \frac{3n-1}{2} \Rightarrow m = n.$$

Finalement, si $m$ est pair et $n$ impair, alors

$$\frac{3m}{2} = \frac{3n-1}{2} \Rightarrow 3m = 3n - 1 \Rightarrow m = n - \frac{1}{3},$$

ce qui est impossible puisque $m$ et $n$ sont tous deux entiers ! De la même façon, le cas $m$ impair et $n$ pair mène à une contradiction. On a montré que $f(m) = f(n)$ implique $m = n$, de sorte que $f$ est bien injective.

Par contre, $f$ n'est pas surjective. Par exemple, il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 2$. Supposons au contraire que ce soit le cas. Il y a alors deux possibilités, selon la parité de $n$. Si $n$ est pair, alors

$$\frac{3n}{2} = 2 \Rightarrow 3n = 4 \Rightarrow n = \frac{4}{3},$$

ce qui contredit le fait que $n$ est entier. De la même façon, si $n$ est impair, alors

$$\frac{3n-1}{2} = 2 \Rightarrow 3n - 1 = 4 \Rightarrow 3n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{3},$$

ce qui est aussi impossible. Ainsi, 2 n'a pas de préimage par $f$, ce qui montre que $f$ n'est pas surjective.

4. (10 points) Suites et sommes

Évaluez les sommes suivantes :

(a) (5 points)

$$\sum_{i \in I} 2^i,$$

où $I = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 \leq a \leq 10, a \bmod 3 = 2\}$.

**Solution:** Remarquons que

$$I = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 \leq a \leq 10, a \bmod 3 = 2\} = \{2, 5, 8\},$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i \in I} 2^i = 2^2 + 2^5 + 2^8 = 4 + 32 + 256 = 292.$$

(b) (5 points)

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} (i - j)$$

**Solution:** Cette fois,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} (i - j) &= \sum_{i=1}^{100} \left( \sum_{j=1}^{100} i - \sum_{j=1}^{100} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{100} \left( 100i - \frac{100(100+1)}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{100} 100i - \sum_{i=1}^{100} \frac{100(100+1)}{2} \\
&= 100 \frac{100(100+1)}{2} - 100 \frac{100(100+1)}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas surprenant. Pour évaluer les deux sommes, on doit prendre la différence de tous les couples $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, 100\}^2$. Or, $(i - j) + (j - i) = 0$, de sortent que tous les termes positifs sont annulés par les termes négatifs, sauf lorsque $i = j$, mais alors la différence est 0.

5. (15 points) ENTIERS ET DIVISIBILITÉ

(a) Pour chacune des équations suivantes, décrivez l'ensemble de tous les $x$, où $x \in \mathbb{Z}$, qui la satisfont :

i. (4 points) $x \equiv 2 \pmod 3$;

**Solution:** On a $x \equiv 2 \pmod 3$ si $3 \mid (x-2)$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3k = x - 2$, se qui se réécrit $x = 3k + 2$. L'ensemble solution est donc

$$\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$$

ii. (4 points) $2x - 1 \equiv 0 \pmod 3$.

**Solution:** Remarquons que l'équation $2x - 1 \equiv 0 \pmod 3$ est équivalente à $2x \equiv 1 \pmod 3$. En multipliant par 2 chaque membre de l'équivalence, on trouve

$$4x \equiv 2 \pmod 3,$$

Or, $3x \equiv 0 \pmod 3$. En soustrayant de l'équation ci-haut, on en déduit $x \equiv 2 \pmod 3$. L'ensemble solution est donc exactement le même qu'à la question précédente, c'est-à-dire

(b) (7 points) Il existe une astuce simple permettant de déterminer si un nombre $n$ est divisible par 3. Il suffit d'additionner chacun de ses chiffres et de vérifier si la somme est elle-même divisible par 3. L'objectif de cette question est de démontrer cette propriété.

Tout d'abord, remarquons que si les $k$ chiffres de $n$ sont $d_{k-1}$, …, $d_1$, $d_0$, alors on a la relation

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} d_i 10^i.$$

Par exemple, si $n = 136$, on a bien

$$136 = 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2.$$

En utilisant cette relation et des propriétés vues en classe, montrez que si la somme des chiffres de $n$ est divisible par 3, alors $n$ est lui aussi divisible par 3. *Indice :* Vous pouvez prendre pour acquis que $10^j \equiv 1 \pmod 3$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

**Solution:** On a

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i 10^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i(10^i - 1) + \sum_{i=0}^{k-1} d_i. \end{aligned}$$

En utilisant l'indice, on remarque que $10^i - 1$ est divisible par 3 pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$. On a donc que $d_i(10^i - 1)$ est divisible par 3 pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$, ce qui entraîne que $\sum_{i=0}^{k-1} d_i(10^i - 1)$ est divisible par 3. Par l'équation précédente, si $\sum_{i=0}^{k-1} d_i$ est divisible par 3, alors

$$\sum_{i=0}^{k-1} d_i(10^i - 1) + \sum_{i=0}^{k-1} d_i$$

est aussi divisible par 3.

6. Démonstrations

(a) (7 points) À l'aide des règles d'inférence vues en classe (modus ponens, modus tollens, etc.), montrez que

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to (r \wedge s) \\ \neg r \vee (\neg t \vee u) \\ p \wedge t \\ \hline \therefore u \end{array}$$

Justifiez bien chacune des étapes de votre raisonnement.

**Solution:** Par simplification, on infère de $p \wedge t$ que $p$ est vraie. Ensuite, comme $p$ et $p \to q$, par modus ponens, on déduit $q$ et, en appliquant une deuxième fois la règle du modus ponens avec $q$ et $q \to (r \wedge s)$, on en déduit $r \wedge s$.

Par simplification de $r \wedge s$, on peut inférer que $r$ est vraie. Maintenant, appliquons le syllogisme disjonctif à $\neg r \vee (\neg t \vee u)$ et $r$, ce qui entraîne $\neg t \vee u$.

Par simplification de $p \wedge t$, on peut aussi inférer que $t$ est vraie. Il ne manque qu'à inférer, par syllogisme disjonctif appliqué à $t$ et $\neg t \vee u$ que $u$ est vraie, ce qui termine la démonstration.

(b) (8 points) Montrez que le produit de trois nombres naturels consécutifs est divisible par 6.

**Solution:** Soit $n$ le premier de ces nombres. Alors les deux autres nombres sont $n+1$ et $n+2$. Clairement, $n$ est pair ou $n+1$ est pair, ce qui entraîne que le produit est pair. De la même façon, on a qu'exactement un nombre parmi $n$, $n+1$ et $n+2$ est divisible par 3, ce qui entraîne que le produit est aussi divisible par 3.

Comme le produit est divisible à la fois par 2 et par 3, il doit être divisible par 6.