Solution de l'examen final

1. (15 points) COMPLEXITÉ

   (a) Utilisez la notation $\mathcal{O}$ pour décrire le taux de croissance de chacune des fonctions suivantes. Votre estimation doit être aussi simple et précise que possible. Dans chaque cas, on suppose que le domaine de la fonction est l'ensemble des entiers strictement positifs, c'est-à-dire que $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$.

   i. (2 points) $f_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

   i. $f_1(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

   ii. (2 points) $f_2(n) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$

   ii. $f_2(n) = \mathcal{O}(2^n)$.

   iii. (2 points) $f_3(n) = n \log_2 n$

   iii. $f_3(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

   iv. (2 points) $f_4(n) = n^2 + 3n + 2$

   iv. $f_4(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

   v. (2 points) $f_5(n) = (n + 1) \log_5(3n^2 - 2n + 100)$

   v. $f_5(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

   (b) (5 points) Ordonnez ces fonctions selon la relation $\mathcal{O}$. Autrement dit, si $f(n)$ est dans $\mathcal{O}(g(n))$ mais que $g(n)$ n'est pas dans $\mathcal{O}(f(n))$, placez $f(n)$ au-dessus de $g(n)$. Si $f(n)$ est dans $\mathcal{O}(g(n))$ et $g(n)$ est dans $\mathcal{O}(f(n))$, placez $f(n)$ et $g(n)$ sur la même ligne.

$$f_3(n), f_5(n)$$

$$f_1(n), f_4(n)$$

$$f_2(n)$$

2. (15 points) Algorithmes

Considérez l'algorithme suivant qui calcule combien de valeurs du tableau de nombres entiers T, de longueur n, sont comprises entre a et b inclusivement.

```
1: fonction Compter(T : tableau indicé de 0 à n − 1, a : entier, b : entier) : entier
2:     compteur ← 0
3:     pour i ← 0, 1, . . . , n − 1 faire
4:         si a ≤ T[i] ≤ b alors
5:             compteur ← compteur + 1
6:         fin si
7:     fin pour
8:     retourner compteur
9: fin fonction
```

(a) Faites la trace de cet algorithme avec $T = [18, -11, 28, -2, 9, 18]$ avec les valeurs de a et b données :

i. (3 points) $a = -10$, $b = 10$

i	0	1	2	3	4	5
compteur	0	0	0	1	2	2

ii. (3 points) $a = 5$, $b = 0$

i	0	1	2	3	4	5
compteur	0	0	0	0	0	0

(b) (5 points) Déterminez le nombre exact d'opérations de *comparaison* ($<$, $\leq$, $=$, $\geq$, $>$, $\neq$) qui sont effectuées par l'algorithme en fonction de n. *Remarque :* Vous pouvez supposer que les deux comparaisons de la ligne 4 sont toujours effectuées.

Solution: En plus des deux comparaisons de la ligne 4, il ne faut pas oublier la comparaison de la ligne 3 qui est effectuée à chaque tour de boucle pour vérifier si on a terminé ou si on effectue un prochain tour. Par conséquent, on effectue au total $2n$ comparaisons (ligne 4) plus $n + 1$ comparaisons (ligne 3), ce qui donne $3n + 1$ comparaisons.

(c) (4 points) Donnez un estimé $\mathcal{O}$ du temps d'exécution de l'algorithme en fonction de n.

Solution: Toutes les opérations sont effectuées en temps constant. Il suffit donc de calculer le nombre de tours de boucles total. Comme il n'y en a qu'une et qu'elle est répétée n fois, on obtient un temps d'exécution $\mathcal{O}(n)$.

3. (15 points) INDUCTION MATHÉMATIQUE ET DÉFINITIONS RÉCURSIVES

Soit la suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la façon suivante :

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad \text{et} \quad b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2 \quad \text{pour } n \geq 2.$$

(a) (4 points) Calculez b_2, b_3, b_4 et b_5.

Solution:

$$\begin{aligned}
b_2 &= 2b_1 - b_0 + 2 = 2\cdot 1 - 0 + 2 = 4 \\
b_3 &= 2b_2 - b_1 + 2 = 2\cdot 4 - 1 + 2 = 9 \\
b_4 &= 2b_3 - b_2 + 2 = 2\cdot 9 - 4 + 2 = 16 \\
b_5 &= 2b_4 - b_3 + 2 = 2\cdot 16 - 9 + 2 = 25.
\end{aligned}$$

(b) (3 points) Exprimez b_n à l'aide d'une formule explicite (c'est-à-dire non récursive), pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Il semblerait qu'on ait $b_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) (8 points) Utilisez le deuxième principe d'induction (induction forte) pour démontrer la formule que vous avez trouvée en (b).

Solution: On montre le résultat par induction forte sur n.

CAS DE BASE. On a $b_0 = 0 = 0^2$ et $b_1 = 1 = 1^2$, ce qui montre que le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

HYPOTHÈSE D'INDUCTION. Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, on ait bien $b_m = m^2$.

ÉTAPE INDUCTIVE. On doit montrer que $b_n = n^2$. On a

$$\begin{aligned}
b_n &= 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2 \quad (\text{définition récursive de } b_n) \\
&= 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\
&= 2(n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 4n + 4) + 2 \\
&= 2n^2 - 4n + 2 - n^2 + 4n - 4 + 2 \\
&= n^2,
\end{aligned}$$

tel que voulu.

4. (15 points) ALGORITHMES RÉCURSIFS

Considérez l'algorithme récursif suivant :

fonction MYSTÈRE(s : chaîne de caractères) : booléen
    $n \leftarrow s.$LONGUEUR()
    si $n = 0$ **ou** $n = 1$ **alors**
        résultat $\leftarrow$ *vrai*
    sinon si $s[0] \neq s[n-1]$ **alors**
        résultat $\leftarrow$ *faux*
    sinon
        résultat $\leftarrow$ MYSTÈRE($s.$SOUSCHAINE$(1, n-1)$)
    fin si
    retourner *résultat*
fin fonction

On utilise la notation suivante :

- Si s est une chaîne de caractères de longueur n, alors $s[i]$ retourne le caractère en position i, pour tout indice $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$;
- Si s est une chaîne de caractères de longueur n, alors $s.$SOUSCHAINE(i, j) retourne la sous-chaîne entre l'indice i (inclus) et l'indice j (exclu), où $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $i \leq j$. Par exemple, *"bonjour"*.SOUSCHAINE$(2, 4)$ retourne *"nj"*.

(a) (10 points) Donnez un exemple de chaîne de caractères w de longueur au moins 3 tel que MYSTÈRE(w) retourne *vrai* et un autre exemple tel que MYSTÈRE(w) retourne *faux*.

> **Solution:** Si $w =$ *"radar"*, alors MYSTÈRE(w) retournera vrai.
> Si $w =$ *"patate"*, alors MYSTÈRE(w) retournera faux.

(b) (5 points) Expliquez en quelques mots ce que fait la fonction MYSTÈRE.

> **Solution:** La fonction MYSTÈRE(w) retourne *vrai* si et seulement si w est un palindrome.

5. (20 points) Relations

(a) Soit la relation binaire $R = \{(a,b) \mid a < b + 3\}$ sur $\mathbb{Z}$.

i. (10 points) R est-elle réflexive ? R est-elle symétrique ? R est-elle antisymétrique ? R est-elle transitive ? R est-elle une relation d'équivalence ? Vous devez justifier vos réponses par une courte démonstration ou un contre-exemple.

Solution: La relation R est *réflexive*. En effet, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $a < a + 3$, de sorte que $(a,a) \in R$.
Elle n'est *pas symétrique*. Par exemple, $(0, 10) \in R$, puisque $0 < 10 + 3$, mais $(10, 0) \notin R$ puisque $10 \not< 0 + 3$.
Elle n'est *pas antisymétrique*. Par exemple, $(0, 1) \in R$, puisque $0 < 1 + 3$ et $(1, 0) \in R$, puisque $1 < 0 + 3$, mais $0 \neq 1$.
Elle n'est *pas transitive*. Par exemple, $(4, 2) \in R$, puisque $4 < 2 + 3$. Aussi, $(2, 0) \in R$ puisque $2 < 0 + 3$. Par contre, $(4, 0) \notin R$ puisque $4 \not< 0 + 3$.
R n'est pas une relation d'équivalence, puisqu'elle n'est ni symétrique, ni transitive.

ii. (5 points) Donnez la fermeture réflexive de R ainsi que sa fermeture symétrique. (Décrivez ces ensembles le plus simplement possible pour avoir tous les points.)

Solution: La relation R est réflexive, donc sa fermeture réflexive est R elle-même.
La fermeture symétrique de R est

$$R^{sym} = R \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Montrons que $R^{sym} = \mathbb{Z}^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}$. Il y a deux cas possibles : (1) $(a, b) \in R$ et (2) $(a, b) \notin R$. Si $(a, b) \in R$, alors $(a, b) \in R^{sym}$. Sinon, on a que $a \geq b + 3$. Par conséquent, $b \leq a - 3 < a + 3$, ce qui montre que $(b, a) \in R$. Par conséquent, $(a, b) \in R^{sym}$. Ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(a, b) \in R^{sym}$.

(b) (5 points) Soient $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{x, y, z\}$, R_1 une relation de A vers B et R_2 une relation de B vers C où

$$R_1 = \{(a,b) \mid b^2 - a^2 \geq 4\} \quad \text{et} \quad R_2 = \{(1,x), (2,x),(2,z),(3,y),(4,x),(4,y)\}.$$

Trouvez $R_2 \circ R_1$

Solution: Tout d'abord, remarquons que

$$R_1 = \{(-1, 3), (-1, 4), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Par conséquent,

$$R_2 \circ R_1 = \{(-1, x), (-1, y), (0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y)\}.$$

6. (20 points) RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Soit $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où aRb si et seulement si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$.

(a) (8 points) Montrez que R est une relation d'équivalence.

Solution: *Réflexivité.* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$, puisque ($\lfloor \cdot \rfloor$ est une fonction).
Symétrie. Si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$, alors $\lfloor b \rfloor = \lfloor a \rfloor$ (l'égalité est symétrique).
Transitivité. Si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ et $\lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor$, alors $\lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor$ (l'égalité est transitive).

(b) (4 points) Décrivez les ensembles $[1]_R$ et $[2{,}03]_R$. *Indice :* Décrivez ces ensembles à l'aide de la notation pour les intervalles fermés $[x{,}y]$, ouverts $(x{,}y)$ ou semi-ouverts $[x{,}y)$, $(x{,}y]$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} [1]_R &= [1{,}2) \\ [2{,}03]_R &= [2{,}3). \end{aligned}$$

(c) (4 points) Donnez une formule générale pour l'ensemble $[n]_R$, peu importe $n \in \mathbb{N}$.

Solution: De façon générale, on a $[n]_R = [n, n+1)$.

(d) (4 points) Décrivez l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{\infty}[i]_R$ le plus simplement possible.

Solution: On a

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}[i]_R = [0{,}1) \cup [1{,}2) \cup [2{,}3) \cup \cdots = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+.$$