Chapitre 7: Transformations

INF5071 — Infographie

Alexandre Blondin Massé

Université du Québec à Montréal

Hiver 2019

Transformations

- Une **transformation** est une fonction de la forme

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

  qui associe à chaque point de $\mathbb{R}^3$ un autre point de $\mathbb{R}^3$.
- Une transformation peut agir sur des **points** et/ou des **vecteurs**
- **Exemples:** rotations, translations, réflexions, changements d'échelle, projections, transvections, etc.
- Plusieurs de ces transformations sont **linéaires**: rotations, réflexions
- Autrement dit, elles peuvent être représentées par des **matrices**
- D'autres sont **affines**: translations, symétries glissées
- Elles peuvent également être représentées par des **matrices** si on utilise les coordonnées homogènes

Plan

Rotations

Rotations 2D

- Une rotation d'angle θ autour de l'origine est représentée par

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Notons que

$$\begin{aligned} R(0) &= \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R(45^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Appliquer une rotation à un point $p = (x, y)$ revient simplement à le **multiplier** par la matrice correspondante:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotations 2D quelconque

- Effectuer une **rotation** en 2D autour d'un point p quelconque est simple:

$\rightarrow$ On effectue une **translation** de vecteur $-\vec{Op}$

$\rightarrow$ On applique la **rotation**

$\rightarrow$ Puis on applique la **translation inverse** de vecteur $\vec{0p}$

- Autrement dit, on a une **composition** de fonctions:

$$R_{p,\theta} = T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}$$

- En utilisant les **coordonnées homogènes**, la composition se traduit par un **produit** de matrices
- La situation est plus complexe en **3D**

Rotations 3D

- Une rotation en 3D s'effectue autour d'un **axe de rotation**
- Représentations classiques:

→ En utilisant trois angles (*yaw*, *pitch*, *roll* ou angles d'Euler)

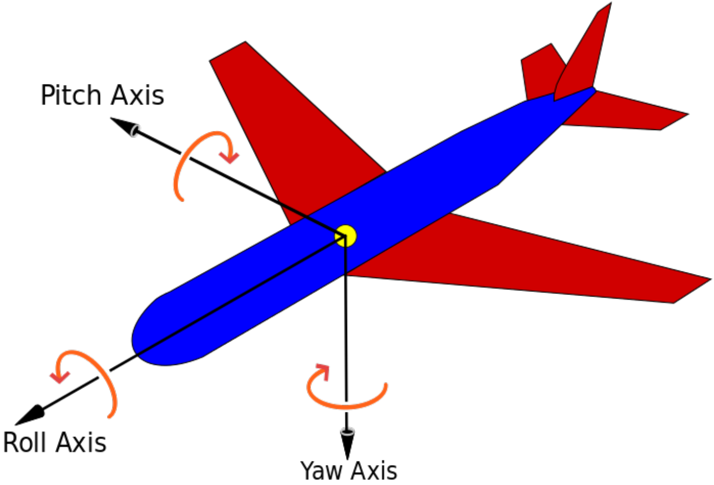
→ En utilisant les **quaternions**

- Dans la plupart des cas, les **angles d'Euler** sont suffisants
- Mais ils présentent quelques **inconvénients**: moins compacts, blocage de Cardan, interpolation sphérique

Blocage de Cardan

- En utilisant certaines combinaisons de rotations, on perd un degré de liberté
- Voir animation sur Wikipedia: https://fr.wikipedia.org/wiki/Blocage_de_cardan
- **Solution:** utiliser les **quaternions**

Yaw, pitch, roll



(Source: Wikipedia)

Coordonnées homogènes

Contexte

- Soit $\mathbf{P}$ un point, $\mathbf{M}$ une matrice de transformation et $\mathbf{T}$ un vecteur de translation
- Alors la **transformation** associée à $\mathbf{M}$ et $\mathbf{T}$ est donnée par

$$\mathbf{P} \mapsto \mathbf{MP} + \mathbf{T}$$

- En appliquant deux transformations de suite de cette forme, on obtiendrait

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &\mapsto \mathbf{M_2}(\mathbf{M_1}\mathbf{P} + \mathbf{T_1}) + \mathbf{T_2} \\ &\mapsto (\mathbf{M_2}\mathbf{M_1})\mathbf{P} + \mathbf{M_2}\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}\end{aligned}$$

- La **combinaison** de somme et de produit n'est pas pratique
- Il y a une façon élégante de tout ramener à un **produit**

De 3D vers 4D

- L'idée consiste à ajouter une **4e composante** aux points, aux vecteurs et aux transformations
- La 4e coordonnée est souvent dénotée par la **variable** w
- **Rappel:** au début de la session, nous avons vu qu'il était important de distinguer *point* et *vecteur*, même s'ils appartiennent tous deux à $\mathbb{R}^3$
- **Point**: vecteurs 4×1 pour lesquels $w = 1$
- **Vecteur**: vecteurs 4×1 pour lesquels $w = 0$
- **Transformations**: matrice 4×4:

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{T} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} M_{11} & M_{12} & M_{13} & T_x \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & T_y \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & T_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Transformation inverse

Considérons la **transformation** en 4D suivante:

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{T} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

Alors la transformation **inverse** est donnée par

$$\mathbf{F}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

Exercice

Vérifier que $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}_4$

Interprétation de la coordonnée w

- Pour passer du 3D vers le 4D

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T$$

- Pour passer du 4D vers le 3D

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x}{w} & \frac{y}{w} & \frac{z}{w} \end{bmatrix}^T$$

- La différence de **deux points** est un **vecteur**:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Que se passe-t-il si on **multiplie** un point par un scalaire?

Application: projection perspective

Dans OpenGL, la projection perspective est donnée par la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-\ell} & 0 & \frac{r+\ell}{r-\ell} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

où r, ℓ, t, b, f et n sont les paramètres correspondants aux plans *droit*, *gauche*, *haut*, *bas*, *loin* et *près* respectivement

On obtient une matrice qui a du sens lorsque $f \to +\infty$:

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-\ell} & 0 & \frac{r+\ell}{r-\ell} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nombres complexes

Définition

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$$a + bi,$$

où

- $i = \sqrt{-1}$ est le **nombre imaginaire**
- $a \in \mathbb{R}$ est appelé **partie réelle**
- $b \in \mathbb{R}$ est appelé **partie imaginaire**

On dénote l'**ensemble des nombres complexes** par $\mathbb{C}$.

Plus formellement, i est un nombre qui vérifie l'équation

$$i^2 = -1$$

Représentation

Deux **représentations** importantes:

- Couple de coordonnées **cartésiennes**: (a, b)
- Couple de coordonnées **polaires**: (r, θ)

Passage polaires $\rightarrow$ cartésiennes:

$$a = r \cos\theta, \quad b = r \sin\theta.$$

Passage cartésiennes $\rightarrow$ polaires:

$$\theta = \arctan(a, b), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Identité d'Euler

On a la relation

$$a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$$

Opérations

- Somme:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Multiplication:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- Conjugaison:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

- Norme:

$$\|a + bi\| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- On peut représenter les **transformations** de base à l'aide de ces opérations!

Translations et changements d'échelle

- Soient $a + bi \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^+$
- Une **translation** de vecteur (c, d) revient à une **addition**:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Puis un **changement d'échelle** de facteur k revient à une multiplication:

$$k(a + bi) = ka + (kb)i.$$

Rotations

- En 2D, elles peuvent être représentées par des **matrices** 2×2
- Or, on peut aussi représenter une rotation par un **nombre complexe**

$$a + bi,$$

  qui satisfait $\|a + bi\| = 1$ (c'est-à-dire **unitaire**)
- Grâce à l'identité d'**Euler**, on sait que ce nombre est de la forme $e^{i\theta}$, puisque $r = 1$
- Pour **appliquer** la rotation à un point, il suffit de le multiplier par le nombre qui représente la rotation

Exemple

- Considérons le point $P = (3, 4)$
- À l'aide des **nombres complexes**, appliquons-lui une rotation autour de l'origine d'angle (a) $\pi/2$ et (b) $\pi/4$

Réflexions

- On obtient une formule pour les **réflexions** à l'aide de la **conjugaison**
- La **transformation**

$$\overline{a + bi} = a - bi,$$

qui est une réflexion par rapport à l'axe réel
- Il suffit ensuite de **généraliser** à un axe quelconque en utilisant les translations et les rotations
- Si $a + bi$ est un point et $c + di$ est un axe de réflexion, alors la réflexion du point par rapport à l'axe est donnée par

$$a\left(c^2 + \frac{2bcd}{a} + d^2\right) + b\left(d^2 + \frac{2acd}{b} + c^2\right) i.$$

Projections

- De façon similaire, on obtient une formule pour les **projections** en remarquant que la transformation

$$a + bi \mapsto a,$$

  est une projection sur l'axe **réel** et

$$a + bi \mapsto b,$$

  est une projection sur l'axe **imaginaire**
- Il suffit ensuite de généraliser à un axe quelconque en utilisant les **translations** et les **rotations**
- Si $a + bi$ est un point et $c + di$ est une droite de projection, alors la projection du point sur la droite est donnée par

$$\frac{(ac + bd)(c + di)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Avantages?

- Représentation d'une transformation avec **un seul** nombre complexe
- Toutes les **transformations** peuvent être exprimées à partir des quatre opérations de base:

$\rightarrow$ Addition $=$ translations

$\rightarrow$ Multiplication $=$ rotations

$\rightarrow$ Conjugaison $=$ réflexions

- Donc facile à **implémenter**
- Se généralise (plutôt bien) en 3D avec les quaternions!

Quaternions

Hamilton

Hamilton: 16 octobre 1843, à Dublin

Définition

- **Extension** des nombres complexes
- Trois nombres **imaginaires**, définis par les équations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

- On peut **déduire** les identités suivantes:

$$\begin{aligned} ij &= k, \\ jk &= i, \\ ki &= j, \\ ji &= -k, \\ kj &= -i, \\ ik &= -j. \end{aligned}$$

Opérations

- **Somme:**

$$(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk) = (a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k$$

- **Multiplication:** appelée « produit de Hamilton » (voir diapositive suivante)
- **Conjugaison:**

$$\overline{a+bi+cj+dk} = a - bi - cj - dk$$

- **Norme:**

$$\|a+bi+cj+dk\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Produit de Hamilton

- Le produit de deux quaternions $q = a + bi + cj + dk$ et $q' = a' + b'i + c'j + d'k$ est défini par

$$\begin{aligned} qq' &= aa' - bb' - cc' - dd' \\ &\quad +(ab' + ba' + cd' - dc')i \\ &\quad +(ac' - bd' + ca' + db')j \\ &\quad +(ad' + bc' - cb' + da')k \end{aligned}$$

- Ce produit est **associatif**: $q(q'q'') = (qq')q''$
- Mais il n'est pas **commutatif:** $qq' \neq q'q$ en général
- Souvent, pour alléger la notation, on écrit

$$(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk.$$

Inverse multiplicatif

- L'**inverse** d'un quaternions $q = a + bi + cj + dk$ est donné par

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

- Pas défini si $q = 0$

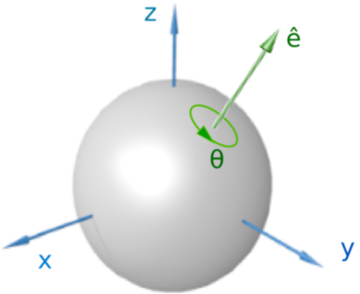
Transformations

Les différentes **transformations** peuvent toutes être représentées par un quaternion:

- **Translations:** addition
- **Rotations:** produit de Hamilton
- **Réflexions:** conjugaison
- **Projections:** projections canoniques

En général, on s'intéresse surtout aux **rotations**.

Représentation d'une rotation



- Un **axe de rotation** est donné par un quaternion **pur unitaire** $q' = ui + vj + wk$
- Ainsi qu'un angle de rotation θ, suivant la règle de la main droite
- On prend le **quaternion** $q = e^{\frac{\theta}{2}q'}$

Application d'une rotation

- Supposons qu'on représente une rotation par un quaternion q
- On souhaite appliquer cette rotation à un point P
- Alors on représente P par un **quaternion pur** p
- On obtient le résultat de la rotation en prenant

$$p' = qpq^{-1}$$

Utilité?

- Représentation **compacte** d'une rotation en 3D
- Plus efficace que les **matrices de rotations**
- Permet d'éviter le **blocage de Cardan**
- Permet de définir facilement l'**interpolation linéaire sphérique**:

$$\textsc{Slerp}(q_0, q_1, t) = q_0(q_0^{-1} q_1)^t,$$

où la vitesse est **uniforme** sur l'arc de cercle, contrairement à une interpolation **linéaire**