Devoir 1

(à remettre en version **papier** au plus tard le 12 mars, à 16h30)
(en classe ou dans la chute du département d'informatique, située au PK-4150)

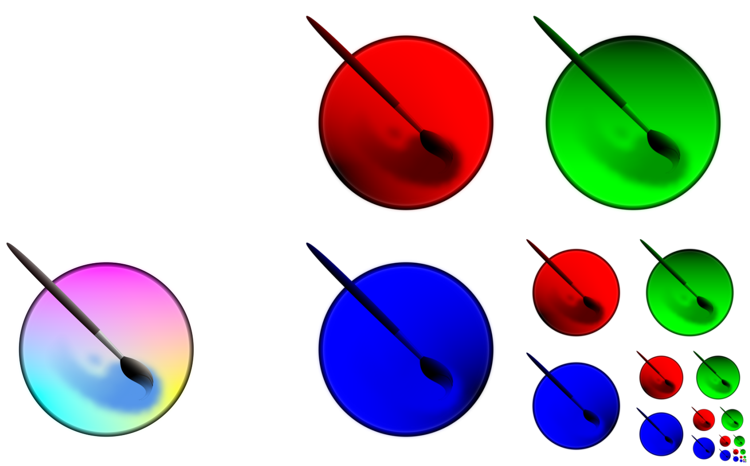
Le devoir doit être rédigé individuellement et à l'ordinateur (il est cependant permis de remettre des annexes avec des schémas dessinés manuellement). Si vous utilisez LaTeX, pour le pseudocode, je vous recommande d'utiliser le paquet `algpseudocode`, déjà inclus dans le préambule et, pour le *listing* de code, je vous recommande le paquet `listings`. Vous devez justifier chacune de vos réponses. Tout retard entraînera une pénalité de **20%** par jour ouvrable. La qualité de la rédaction sera évaluée, en particulier sa clarté, sa précision et sa simplicité.

Question	1	2	3	4	Total
Sur	15	30	20	35	100
Note					

1. (15 points) Écrivez un programme qui prend en entrée une image RGB de format $2^d \times 2^d$ et qui produit une image de format $2^{d+1} \times 2^{d+1}$ qui stocke les canaux rouge, vert et bleu de l'image pour les dimensions $2^i \times 2^i$, où $i = 0, 1, \ldots, d$.

   Votre programme doit être un script shell qui fait appel aux programmes `convert` et `montage` de ImageMagick ou un programme dans votre langage préféré (par exemple Python) qui fait appel à une bibliothèque qui interface avec ImageMagick (par exemple, pgmagick).

   Ainsi, on s'attend à obtenir l'image de droite suivante lorsqu'on utilise comme entrée le logo de Krita (image de gauche):



2. (30 points) Dans cette question, on s'intéresse au calcul de l'intersection entre une droite et un cercle.

   Remarque: Ne confondez par *cercle* et *disque*. Un *cercle* est une courbe alors qu'un disque est une surface.

   (a) (10 points) Donnez le pseudocode d'une fonction

   $$\textbf{fonction } \textsc{Racines}(a, b, c : \text{réels}) : \text{ensemble de réels}$$

   qui retourne toutes les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
   Remarque. Le nombre de solutions est 0, 1 ou 2.

   (b) (10 points) Soit C un cercle de centre A et de rayon r. Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point P_0. Rappelons qu'un point P se trouve sur C si et seulement si

   $$\|P - A\|^2 = r^2 \tag{1}$$

   et que P se trouve sur D si et seulement s'il existe un réel t tel que

   $$P = P_0 + t\vec{u} \tag{2}$$

   Montrez que P se trouve simultanément sur C et sur D si et seulement s'il existe un réel t tel que $P = P_0 + t\vec{u}$ et

   $$\left[\|\vec{u}\|^2\right] t^2 + [2(P_0 - A) \cdot \vec{u}]\, t + \left[\|P_0 - A\|^2 - r^2\right] = 0. \tag{3}$$

   Indice. Vous pouvez utiliser les propriétés suivantes du produit scalaire et de la norme sans les démontrer:

   - (carré de la norme) $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
   - (commutativité) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
   - (distributivité) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

   (c) (10 points) Déduire des deux questions précédentes le pseudocode d'une fonction

   $$\textbf{fonction } \textsc{Intersection}(C : \text{cercle}, \Delta : \text{droite}) : \text{ensemble de points}$$

   qui retourne l'ensemble des points qui se situent à l'intersection du cercle C de centre A de rayon r, et de la droite Δ passant par le point P_0 de vecteur directeur $\vec{u}$.
   Remarque 1. Vous pouvez supposer que les opérations habituelles sur les points et sur les vecteurs (addition, soustraction, produit scalaire, norme, etc.) sont disponibles.
   Remarque 2. Vous pouvez utiliser la notation $C.A$, $C.r$, $\Delta.P_0$ et $\Delta.\vec{u}$ pour accéder aux différents paramètres du cercle et de la droite.

3. (20 points) Écrivez un script Blender qui génère un maillage ayant la forme d'une grille comme celle illustrée à la figure 1.

   Les paramètres à prendre en compte sont les suivants:

   - Le nombre de rangées r;
   - Le nombre de colonnes c;
   - L'épaisseur des barreaux b;
   - L'épaisseur des trous t.

   Remarque. Il n'y a aucune contrainte sur l'utilisation d'opérateurs disponibles dans Blender (par exemple une extrusion).

4. (35 points) Soient

   - C un point de $\mathbb{R}^3$;
   - $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs unitaires orthogonaux, c'est-à-dire que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, puis
   - $R > 0$ un nombre réel.

   Considérez la fonction vectorielle

   $$\vec{r}(t) = C + (R\cos t)\vec{u} + (R\sin t)\vec{v}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

   (a) (5 points) En utilisant votre logiciel préféré, dessinez la courbe paramétrée par $\vec{r}(t)$ lorsque $C = (0, 0, 0)$, $R = 1$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

   (b) (5 points) Même question en prenant $C = (1, 1, 1)$, $R = 2$, $\vec{u} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ et $\vec{v} = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$.

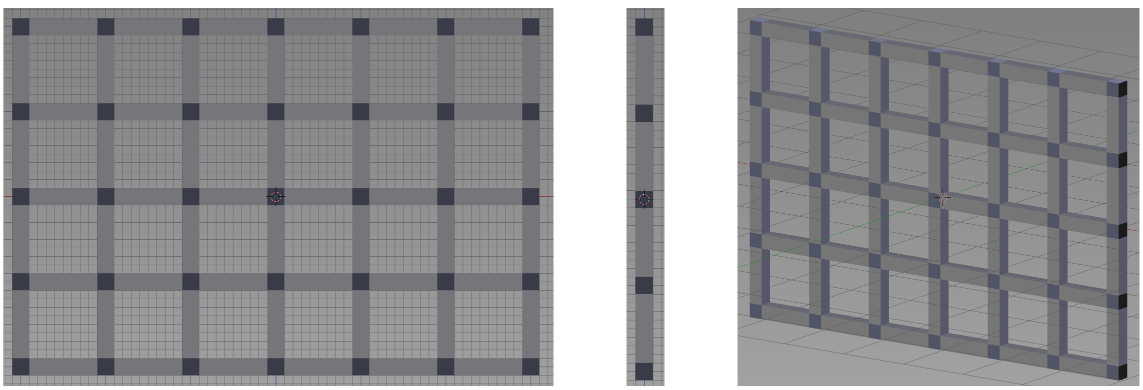
   (c) (10 points) Montrez que la courbe décrite par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ se trouve sur la sphère de centre C de rayon R.

   Indice. Il suffit de montrer que $\|\vec{r}(t) - C\|^2 = R^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (d) (10 points) Montrez que la courbe décrite par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ se trouve dans le plan passant par le point C de vecteur normal $\vec{u} \times \vec{v}$.

   Indice. Il suffit de montrer que $(\vec{r}(t) - C) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (e) (5 points) En déduire une description textuelle de ce qu'est la courbe décrite par $\vec{r}(t)$ peu importe C, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et R.



(a) (b) (c)

Figure 1: Maillage en forme de grille avec les paramètres $r = 4$, $c = 6$, $b = 0.2$ et $t = 0.8$. (a) Vue de face. (b) Vue de côté. (c) Vue en angle.