Nom _____

Prénom _____

Code permanent _____

Examen intra

Date : 29 octobre 2019

Titre du cours : Programmation fonctionnelle et logique

Sigle et groupe : INF6120

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

Instructions

1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
2) Vous avez droit à toute votre documentation papier ;
3) Vous ne devez pas dégrafer le questionnaire ;
4) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
5) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
6) Indiquez clairement vos réponses finales ;

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Sur	15	15	10	15	25	20	100
Note							

Question 1. . . . . (15 points)
(Pour cette question, aucune justification n'est requise. Dans le cas d'une mauvaise réponse, vous pourriez obtenir quelques points si vous avec laissé des traces de votre démarche.)
Pour chacune des expressions suivantes, indiquez quelle est la valeur retournée par l'interpréteur.

(1) (3 points)

```
>>> map (:"oi") "cflmrst"
```

(2) (3 points)

```
>>> filter odd [x * x | x <- [1..10]]
```

(3) (3 points)

```
>>> foldr1 (*) [1,3,5]
```

(4) (3 points)

```
>>> zipWith (\x y -> x * y - 1) [1,2,3] [4,5,6]
```

(5) (3 points)

```
>>> all ((==1) . (`mod` 7)) [22,1,14]
```

Question 2. . . . . (15 points)
Écrivez une fonction qui prend en entrée une liste `xs` et qui retourne `True` si et seulement si `xs` est une *répétition double*, c'est-à-dire qu'il existe une liste non vide plus courte `ys` telle que

`xs == ys ++ ys`.

Complétez directement le code ci-bas :

```
1  -- | Retourne vrai si une liste est une répétition double
2  --
3  -- >>> estDouble []
4  -- False
5  -- >>> estDouble [1,1]
6  -- True
7  -- >>> estDouble "abc"
8  -- False
9  -- >>> estDouble "abab"
10 -- True
11 -- >>> estDouble [1,2,3,1,2]
12 -- False
13 -- >>> estDouble [1,2,3,1,2,3]
14 -- True
15 estDouble :: Eq a => [a] -> Bool
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30 _
```

Question 3. . . . . (10 points)
Nous avons vu en classe que, par défaut, le type `[a]` est une instance de `Ord`, en utilisant l'ordre lexicographique. On souhaiterait proposer une instance alternative de `Ord` pour les listes qui utilise l'ordre *radix*, défini comme suit :

- Si les deux listes sont de longueurs différentes, alors on compare la longueur des listes ;
- Si les listes sont de même longueur, alors on se rabat sur l'ordre lexicographique.

Complétez l'implémentation suivante pour obtenir l'ordre radix :

```
1  module RadixList where
2
3  newtype RadixList a = RadixList [a]
4      deriving (Eq,Show)
5
6  -- | L'ordre radix
7  --
8  -- Si les listes sont de longueurs différentes, on compare les longueurs:
9  --
10 -- >>> RadixList [5,6] < RadixList [1,2,3,4]
11 -- True
12 -- >>> RadixList "abc" >= RadixList "de"
13 -- True
14 --
15 -- Si elles sont de même longueur, on utilise l'ordre lexicographique:
16 --
17 -- >>> RadixList [1,4] < RadixList [2,3]
18 -- True
19 -- >>> RadixList "trois" < RadixList "trait"
20 -- False
21 instance Ord a => Ord (RadixList a) where
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36 _
```

Question 4. . . . . (15 points)
(Pour cette question, aucune justification n'est requise. Dans le cas d'une mauvaise réponse, vous pourriez obtenir quelques points si vous avec laissé des traces de votre démarche.)
Qu'est-ce qui devrait être affiché par l'interpréteur si on entre les expressions suivantes ?

(1) (3 points)

```
>>> fmap (*4) Nothing
```

(2) (3 points)

```
>>> pure (*4) <*> Just 5
```

(3) (3 points)

```
>>> pure (:) <*> [1,2,3] <*> [[4],[5,6]]
```

(4) (3 points)

```
>>> replicate <$> [1,2,3] <*> "ab"
```

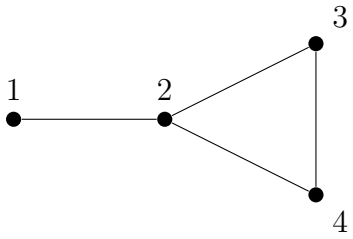
(5) (3 points)

```
>>> (<=) <$> ZipList "banane" <*> ZipList "fraise"
```

Question 5. ..... (25 points)
En théorie des ensembles, si E est un ensemble, alors on désigne par $\mathcal{P}_2(E)$ l'ensemble de toutes les paires de E, c'est-à-dire $\mathcal{P}_2(E) = \{\{a, b\} \mid a, b \in E, a \neq b\}$. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, alors

$$\mathcal{P}_2(E) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Un graphe *simple* est un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble dont les éléments sont appelés *sommets* et $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ est un ensemble dont les éléments sont appelés *arêtes*. Par exemple, si $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, alors on obtient le graphe ci-bas, représenté par un dessin (il n'y a pas de flèche car le graphe est non orienté) :



Considérez les déclarations Haskell suivantes :

```haskell
type Sommet = Int
type Arete  = (Int, Int)
type Graphe = ([Sommet], [Arete])

g1 :: Int -> Graphe
g1 n = (v,e)
    where v = [1..n]
          e = [(i,j) | i <- [1..n], j <- [i+1..n]]

g2 :: Int -> Graphe
g2 n = (v,e)
    where v = [1..n]
          e = zip [1..n] (drop 1 . cycle $ [1..n])

g3 :: Int -> Int -> Graphe
g3 m n = (v,e)
    where v = [1..m+n]
          e = [(i,j) | i <- [1..m], j <- [m+1..m+n]]

g4 :: Int -> Graphe
g4 n = (v,e)
    where v = [0..n]
          e = zip [1..n] (repeat 0)

-- Rappel: la fonction snd retourne le 2e élément d'un couple
g5 :: Int -> Graphe
g5 n = (v,e1 ++ e2)
    where v  = [0..n]
          e1 = snd $ g2 n
          e2 = snd $ g4 n
```

Dessinez le graphe correspondant à chacune des expressions suivantes.

(1) (3 points) `g1 5`

(2) (3 points) `g2 6`

(3) (3 points) `g3 3 4`

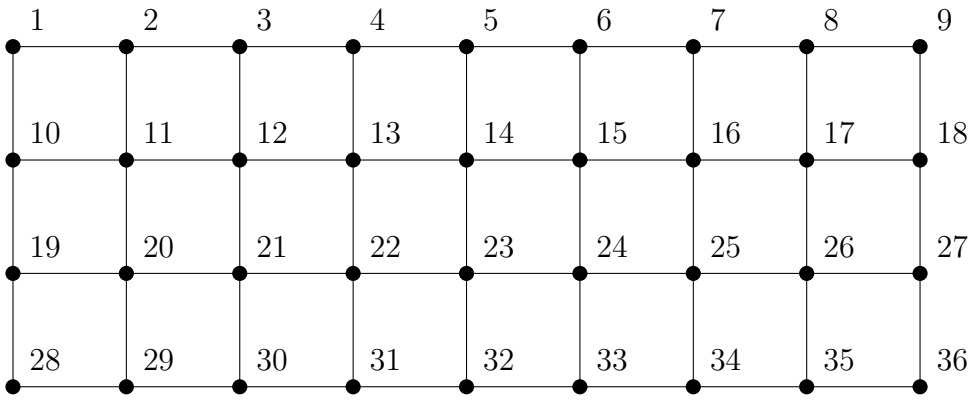
(4) (3 points) `g4 7`

(5) (3 points) `g5 5`

(6) (10 points) Écrivez une fonction Haskell dont la signature est

```
grille :: Int -> Int -> Graphe
```

qui génère le graphe grille de m lignes et de m colonnes.
Par exemple, on souhaiterait que l'appel `grille 4 9` génère le graphe dessiné ci-bas :



Aide : ce graphe possède mn sommets et $m(n-1)+n(m-1)$ arêtes. De plus, il peut être pratique d'introduire une fonction auxiliaire qui calcule le numéro d'un sommet $k(i,j)$ à partir du numéro de ligne i et du numéro de colonne j.

Question 6. . . . . (20 points)

Un *arbre rouge-noir* est un arbre binaire de recherche dans lequel chaque noeud est colorié en rouge ou en noir (avec la convention que la couleur d'un arbre vide est noire).

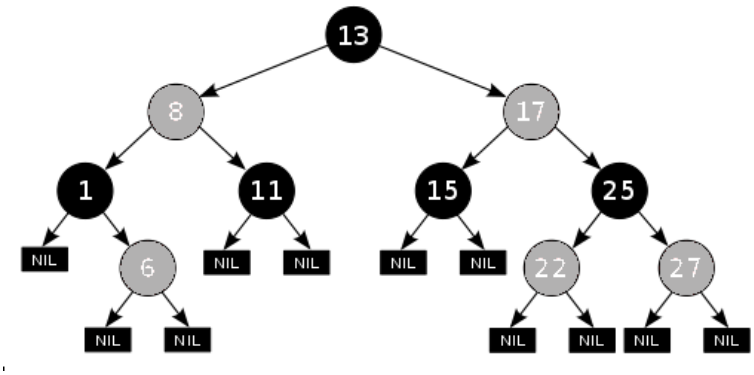
Étant donné un noeud N dans un arbre rouge-noir, on appelle *hauteur noire* de N le nombre maximal de noeuds noirs qu'on rencontre à partir de N jusqu'à n'importe quelle feuille. Plus précisément,

- La hauteur noire d'un noeud vide est 1 ;
- La hauteur noire d'un noeud noir ayant G et D comme enfants est égale à 1 plus le maximum des hauteurs noires de G et de D ;
- La hauteur noire d'un noeud rouge ayant G et D comme enfants est égale au maximum des hauteurs noires de G et de D.

On dit qu'un arbre rouge-noir est *valide* s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

1. Un arbre vide est considéré de couleur noire ;
2. La racine de l'arbre doit être noire ;
3. Les deux enfants d'un noeud rouge sont nécessairement noirs ;
4. Pour tout noeud dont les enfants sont G et D, la hauteur noire de G doit être égale à la hauteur noire de D.

Voici un exemple d'arbre rouge-noir valide (les noeuds rouges apparaissent en gris dans la version imprimée et les arbres vides sont identifiés par `NIL`) :



Complétez le module `RedBlack.hs` suivant en tenant compte des observations données plus haut et en lisant attentivement la documentation (*docstring*). Écrivez directement dans le code. Les points sont répartis comme suit :

(1) (4 points) L'instance `Functor` pour `RBN` ;

(2) (4 points) La fonction `color` ;

(3) (6 points) La fonction `blackHeight` et

(4) (6 points) La fonction `isValid`.

```haskell
module RedBlack where

-- | Data types
data Color = Red | Black
    deriving (Eq,Show)

data RBT a = RBT { -- Red-black tree
    root :: RBN a  -- Root node
} deriving Show

data RBN a          -- Red-black node
    = Empty         -- Empty tree
    | Node Color    -- Color of node
           a        -- Content of node
           (RBN a) -- Left subtree
           (RBN a) -- Right subtree
    deriving Show

-- | Making a red-black leaf
makeLeaf :: Color -> a -> RBN a
makeLeaf c x = Node c x Empty Empty

-- | The (valid) red-black tree drawn in the exam
tree1 = RBT
    (Node Black 13 (
        Node Red 8 (
            Node Black 1 (
                Empty)
                (makeLeaf Red 6)) (
            makeLeaf Black 11)) (
        Node Red 17 (
            makeLeaf Black 15) (
            Node Black 25 (
                makeLeaf Red 22) (
                makeLeaf Red 27))))

-- | Invalid: root is not black
tree2 = RBT (Node Red 8 (makeLeaf Black 4) (makeLeaf Black 9))

-- | Invalid: red node cannot have red child
tree3 = RBT
    (Node Black 8 (
        Node Red 4
            Empty (
            makeLeaf Red 5)) (
        makeLeaf Black 9))

-- | Invalid: wrong black height at the root
tree4 = RBT (Node Black 8 (makeLeaf Red 4) (makeLeaf Black 9))

-- | Invalid: wrong black height at the root
tree5 = RBT (Node Black 8 (makeLeaf Black 4) Empty)
```

```
53
54  -- | A red-black node is a functor
55  --
56  -- >>> fmap (+1) (makeLeaf Red 5)
57  -- Node Red 6 Empty Empty
58  instance Functor RBN where
59
60
61
62
63
64
65
66
67  -- | A red-black tree is a functor
68  --
69  -- >>> fmap (+1) tree5
70  -- RBT {root = Node Black 9 (Node Black 5 Empty Empty) Empty}
71  instance Functor RBT where
72      fmap f = RBT . fmap f . root
73
74  -- | Returns the color of a node
75  --
76  -- Note: an empty node is considered black
77  --
78  -- >>> color Empty
79  -- Black
80  -- >>> color $ makeLeaf Red 4
81  -- Red
82  -- >>> color $ root tree1
83  -- Black
84  color :: RBN a -> Color
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95  -- | Returns the black height of a node
96  --
97  -- This is the maximum number of black nodes that are visited from the current
98  -- node to any leaf. It is defined recursively as follows:
99  --
100 -- * An empty node has black height 1
101 -- * A node of color black has height 1 + the maximum black height between the
102 --   left and right subtrees.
103 -- * A node of color red has height equal to the maximum black height between
104 --   the left and right subtrees.
```

```haskell
--
-- >>> blackHeight Empty
-- 1
-- >>> blackHeight $ makeLeaf Red 4
-- 1
-- >>> blackHeight $ makeLeaf Black 4
-- 2
-- >>> map (blackHeight . root) [tree1, tree2, tree3, tree4, tree5]
-- [3,2,3,3,3]
blackHeight :: RBN a -> Int
```

```haskell
-- | A red-black tree is valid if it satisfies the following 3 properties:
--
-- 1. The root is black
-- 2. A red node has only black children.
-- 3. For any node, the black height of its left and right subtrees are equal.
--
-- >>> map isValid [tree1, tree2, tree3, tree4, tree5]
-- [True,False,False,False,False]
isValid :: RBT a -> Bool
```