Chapitre 7: Optimisation par apprentissage

INF889B — Algorithmes d'optimisation combinatoire

Alexandre Blondin Massé

Université du Québec à Montréal

Hiver 2020

Partie c: Chaînes de Markov

Plan

Définitions et exemples

Chaîne de Markov

Une **chaîne de Markov** est la donnée

- d'un ensemble d'**états**

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_r\}$$

  et
- pour tout couple d'états (s_i, s_j), un nombre $p_{ij} \in [0, 1]$, appelé **probabilité de transition** de l'état s_i à l'état s_j

Remarques

- On dit qu'on se **déplace** d'un état s_i à un état s_j
- p_{ij} ne **dépend** que de l'état s_i

Exemple

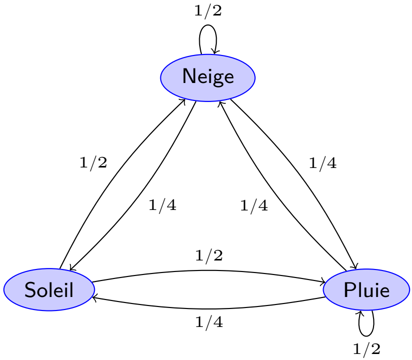
Dans le monde d'Oz, la météo se comporte de façon très bizarre:

- Jamais deux jours **ensoleillés** consécutifs
- Un jour **ensoleillé** est suivi d'un jour **pluvieux** ou **enneigé** (avec la même probabilité)
- Toute journée **pluvieuse** ou **enneigée** est suivi d'une journée semblable avec probabilité $1/2$
- Autrement, si le climat change, il y a une chance sur deux que ce soit pour une **belle** journée;

On représente généralement une chaîne de Markov à l'aide d'une **matrice de transition** ou un **graphe orienté**

Représentation

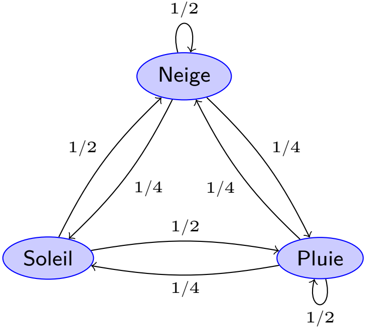
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$



- Supposons qu'aujourd'hui, il fasse **soleil**
- Quelle est la probabilité qu'il fasse soleil dans **deux** jours ? Dans **trois** jours ? Dans **une** semaine ?

Prédictions à long terme

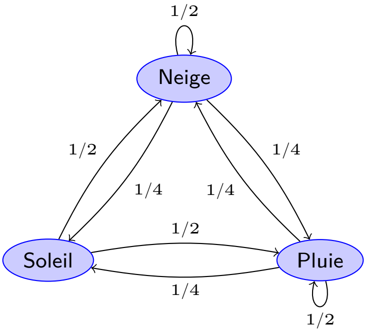
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$



Prédictions à long terme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

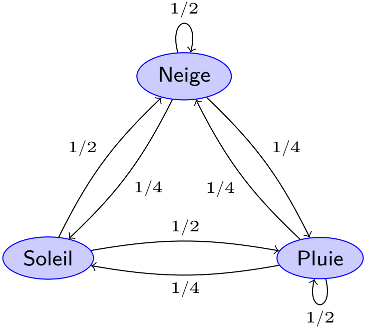


Prédictions à long terme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.406 & 0.203 & 0.390 \\ 0.406 & 0.188 & 0.406 \\ 0.391 & 0.203 & 0.406 \end{pmatrix}$$



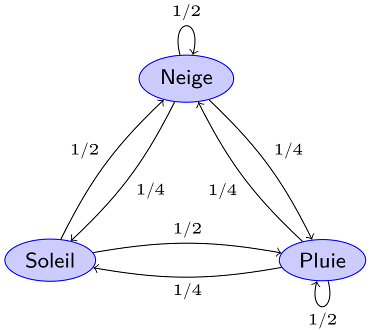
Prédictions à long terme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.406 & 0.203 & 0.390 \\ 0.406 & 0.188 & 0.406 \\ 0.391 & 0.203 & 0.406 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$$



Prédictions à long terme

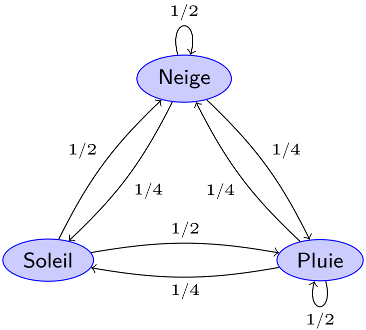
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.406 & 0.203 & 0.390 \\ 0.406 & 0.188 & 0.406 \\ 0.391 & 0.203 & 0.406 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$$



Marche dans une chaîne de Markov

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ la **matrice de transition** d'une chaîne de Markov
- Alors la probabilité de se trouver dans l'état s_j après avoir effectué n **déplacements** depuis s_i est donnée par

$$P(s_i \xrightarrow{n} s_j) = \mathbf{P}^n[i, j]$$

Corollaire

- Soit $\mathbf{u}$ le **vecteur de probabilité** de la distribution **initiale**
- Alors la probabilité de se trouver dans l'état s_i est la i-ème entrée du vecteur

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^n.$$

Propagation d'une rumeur

- Une personne dit à A s'il a l'intention de se présenter ou non aux prochaines élections
- Ensuite, A indique à B ce que la personne lui a dit
- Puis B dit à C ce que A lui a dit, ainsi de suite
- Supposons que la probabilité de **modifier le message** de

$\rightarrow$ **oui** vers **non** est $a \in [0, 1]$;

$\rightarrow$ **non** vers **oui** est $b \in [0, 1]$.

- Alors la matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Génétique

- Processus de **reproduction** d'une plante dans lequel on croise chaque plante enfant avec une plante **hybride** Gg;
- La **matrice** de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{array}{c} GG \\ Gg \\ gg \end{array} & \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Si la reproduction se fait avec une plante **dominante** GG:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{array}{c} GG \\ Gg \\ gg \end{array} & \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chaînes absorbantes

Définitions

État absorbant

- Soit une chaîne de Markov et s_i un état
- On dit que s_i est **absorbant** si $p_{ii} = 1$

Chaîne de Markov absorbante

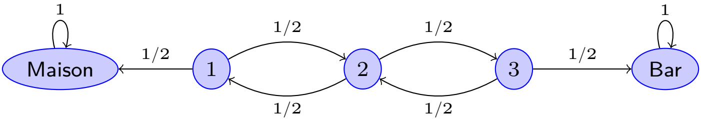
Soit une chaîne de Markov

- qui possède **au moins un** état absorbant et
- tout autre état **mène** à un état absorbant

Alors cette chaîne est dite **absorbante**

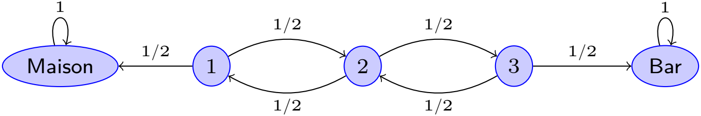
Dans une chaîne absorbante, tout état **non absorbant** est appelé **transitoire** ou **transient**

Marche de l'ivrogne (1/2)



- Un homme se balade sur *Park Avenue*
- S'il se trouve au coin d'une rue, alors il marche à gauche ou à droite avec la **même probabilité**
- Par contre, s'il atteint sa **maison** ou le **bar**, alors il y reste
- Les états « Maison » et « Bar » sont **absorbants**

Marche de l'ivrogne (2/2)



Questions

- Quelle la probabilité de terminer dans un **état absorbant**?
- En **moyenne**, combien de temps cela prend avant d'atteindre un **état absorbant**?
- En **moyenne**, combien de temps passe-t-on dans chaque **état transitoire**?

Solution

- On peut écrire un programme qui lance **plusieurs simulations**
- On a aussi des réponses **théoriques exactes**

Forme canonique (1/2)

- Reprenons la **matrice de transition** pour la marche de l'ivrogne:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On permute les lignes et les colonnes pour avoir d'abord les états **transitoires** puis ensuite les états **absorbants**:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \\ \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Forme canonique (2/2)

- La n-**ième** puissance d'une matrice sous forme **canonique** est donc de la forme

$$\mathbf{P}^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^n & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Théorème

- Soit un processus évoluant dans une chaîne de Markov **absorbante**
- Alors la probabilité que le processus soit **absorbé** est 1:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{Q}^n = 0.$$

Matrice fondamentale

- Soit $\mathbf{P}$ la **matrice de transition** d'une chaîne de Markov
- Soit $\mathbf{Q}$ la sous-matrice des états **transitoires**
- Alors la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ est **inversible** et son inverse est

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}^3 + \ldots$$

- On appelle $\mathbf{N}$ la **matrice fondamentale** de $\mathbf{P}$

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ est une **matrice de transition** d'une chaîne de Markov
- Soit sa matrice fondamentale

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

- Alors $\mathbf{N}$ indique le nombre de **passages** dans les états **transitoires**, c'est-à-dire que $\mathbf{N}[i, j]$ est le nombre de fois **moyen** par lequel on passe par l'état s_j si on commence dans l'état s_i

Retour sur la marche de l'ivrogne

- Reprenons la matrice de **transition**:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

- Alors

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Puis

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

\end{itemize} \end{frame}

Temps avant absorption

- Supposons qu'on commence à l'état s_i
- À combien de déplacements en **moyenne** devrait-on s'attendre avant d'atteindre un état **absorbant**?

Théorème

- Soit t_i le nombre **moyen** de déplacements avant d'atteindre un état **absorbant**
- En supposant qu'on commence dans l'état s_i
- Soit $\mathbf{t}$ le vecteur colonne dont la i-ème entrée est t_i.
- Alors

$$\mathbf{t} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne dont toutes les entrées sont 1

Probabilité d'absorption dans un état donné

- Souvent, il y a **plusieurs** états absorbants
- Probabilité d'atteindre un état absorbant **particulier**
- Rappelons que la matrice de **transition** est de la forme

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Théorème

- Soit b_{ij} la probabilité qu'un processus soit absorbé
- dans l'état absorbant s_j s'il commence dans l'état transitoire s_i
- Si $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, alors

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}\mathbf{R},$$

où $\mathbf{N}$ est la matrice **fondamentale**

Retour sur la marche de l'ivrogne (1/2)

On obtient

$$
\mathbf{N} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{1} \\
&= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Retour sur la marche de l'ivrogne (2/2)

Puis

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{NR} \\ &= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \\ &= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \end{aligned}$$

Exercice

- Albert souhaite sortir de prison sous caution
- Il doit payer 8 **dollars**
- Or, il n'a que 3 **dollars** sur lui

Un gardien accepte de **parier** avec lui selon les règles suivantes:

- Si Albert parie k dollars, il gagne k dollars avec probabilité 0.4
- Sinon, il perd k dollars avec probabilité 0.6

Questions

- Quelle **stratégie** Albert devrait-il utiliser?
- En utilisant cette stratégie, quelle est la **probabilité** qu'il puisse sortir?

Justifiez votre réponse.

Chaînes ergodiques

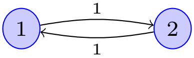
Chaînes non absorbantes

- Jusqu'à maintenant, nous avons étudié surtout les chaînes **absorbantes**
- Il existe évidemment des chaînes **non absorbantes**
- Nous allons maintenant étudier les chaînes **ergodiques**
- On dit qu'une chaîne est **ergodique** s'il est possible d'atteindre **tout état** à partir de **tout autre état**
- En d'autres termes, le graphe orienté associé est **fortement connexe** (en anglais, *strongly connected*)
- Dans plusieurs livres, ces chaînes sont aussi appelées **irréductibles**

Chaînes régulières

- Certaines chaînes ergodiques sont dites **régulières**
- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de **transition** d'une chaîne de Markov
- On dit que la chaîne est **régulière**, s'il existe un entier n tel que $\mathbf{P}^n$ est **strictement positive** (toutes ses entrées sont strictement positives)
- Ceci signifie que chaque état peut atteindre chaque état en **exactement n déplacements**
- Une chaîne de Markov **régulière** est nécessairement **ergodique**, puisque chaque état peut atteindre tout autre état
- En revanche, une chaîne de Markov ergodique n'est **pas nécessairement** régulière (exemple sur la page suivante)

Chaîne ergodique non-régulière



- La matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Or,

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Modèle de Ehrenfest

- Modèle utilisé pour expliquer la **diffusion des gaz**
- Il y a 2 urnes et b boules
- À chaque étape, une boule **au hasard** est choisie et déplacée dans l'autre urne
- Un **état** est uniquement identifié par le **nombre de boules** dans la **première urne**:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Cette chaîne est **ergodique**, mais **non régulière**

Chaînes régulières

- Toute chaîne de Markov **absorbante** est **non régulière**
- Prenons par exemple la matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On peut facilement voir que $\mathbf{P}^n[1,2] = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

Propriétés des chaînes régulières

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une chaîne de Markov **régulière**
- Alors il existe une matrice

$$\mathbf{W} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$$

dont toutes les **lignes** sont égales à un même vecteur de probabilité strictement positif $\mathbf{w}$

Retour sur Oz

Dans l'exemple **météorologique**, on a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Propriété stationnaire des chaînes régulières

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une **chaîne régulière**
- Soit

$$\mathbf{W} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$$

- Soit $\mathbf{w}$ le vecteur **commun** à toutes les lignes de $\mathbf{W}$
- et $\mathbf{1}$ un vecteur colonne dont toutes les entrées sont 1

Alors

- $\mathbf{w}\mathbf{P} = \mathbf{w}$
- $\mathbf{w}$ est l'**unique** vecteur de probabilité vérifiant l'égalité précédente
- $\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et tout vecteur $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ est un **multiple** de $\mathbf{c}$

Exemple

- Dans l'exemple du monde d'Oz, on a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- On cherche $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, où $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, tel que

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

- Il suffit alors de **résoudre le système** d'équations et on obtient

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Processus stationnaire (1/2)

Plusieurs propriétés des chaînes **régulières** sont aussi vraies pour les chaînes **ergodiques**:

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov **ergodique**
- Alors il existe un unique vecteur de probabilité $\mathbf{w}$ tel que

$$\mathbf{wP} = \mathbf{w}$$

  et $\mathbf{w}$ est **strictement positif**
- De plus, tout vecteur $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{vP} = \mathbf{v}$ est un multiple de $\mathbf{w}$
- et tout vecteur $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{Px} = \mathbf{x}$ est un vecteur constant

Processus stationnaire (2/2)

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov **ergodique**
- Soit
$$\mathbf{A}_n = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^n}{n+1}$$
- Alors
$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{W},$$
où $\mathbf{W}$ est une matrice dont toutes les lignes sont égales à l'unique vecteur de probabilité $\mathbf{w}$ tel que $\mathbf{wP} = \mathbf{w}$.

Loi des grands nombres

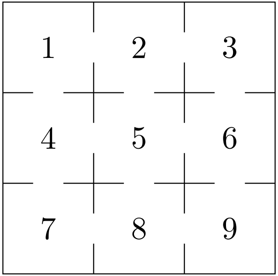
Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition
- Soit w_j la j-ième entrée du vecteur $\mathbf{w}$ qui est fixé par $\mathbf{P}$
- Soit $H_j^{(n)}$ le **nombre de passages** dans l'état s_j après avoir effectué n déplacements
- Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|H_j^{(n)} - w_j\right| > \epsilon\right) \to 0,$$

peu importe l'état de départ s_i.

Marche dans un labyrinthe (1/3)



- Dans chaque pièce, supposons qu'on choisit un déplacement de façon **complètement aléatoire**
- À **quel type** de chaîne de Markov a-t-on affaire?
- Il s'agit clairement d'une chaîne **ergodique**
- Par contre, elle n'est pas **régulière** (pourquoi?)

Marche dans un labyrinthe (2/3)

On obtient la matrice de transition suivante:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Marche dans un labyrinthe (3/3)

- On constate aussi que le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  vérifie l'équation $\mathbf{xP} = \mathbf{x}$
- Par conséquent, le vecteur décrivant la **probabilité** d'être dans un état donné est

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/6 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Temps de premier passage

Retour et récurrence

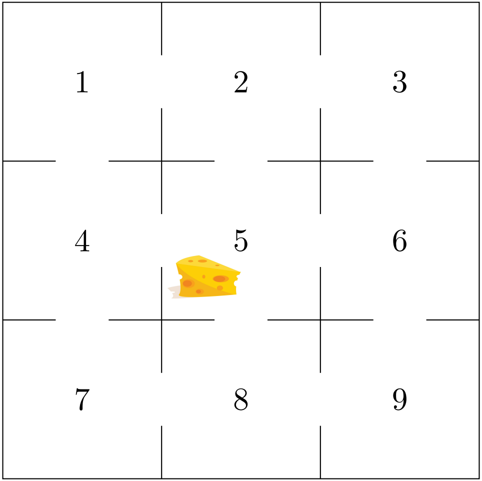
- Lorsqu'on a étudié les chaînes **absorbantes**, nous nous sommes intéressés au temps **avant absorption**
- Dans le cas de chaînes **ergodiques**, on parle plutôt du **temps de premier retour**, ou de **premier passage**
- Le nombre de déplacements **moyen** effectué à partir de l'état s_i pour atteindre l'état s_j est appelé **temps moyen de premier passage**

Pour calculer ce temps moyen, l'idée est la suivante:

- On remplace l'**état d'arrivée** par un état absorbant
- On calcule ensuite le **temps avant absorption**

Retour sur le labyrinthe (1/4)

Supposons que l'état 5 soit maintenant un état **absorbant**:



Retour sur le labyrinthe (2/4)

On obtient la matrice de transition suivante:

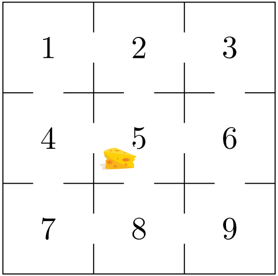
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Retour sur le labyrinthe (3/4)

La matrice fondamentale est

$$
\mathbf{N} = \frac{1}{8}
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\
6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\
6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\
4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\
2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Retour sur le labyrinthe (4/4)



- Le temps avant absorption est donné par

$$\mathbf{t} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t.$$

- Ainsi, en **moyenne**, on doit effectuer 5 **déplacements** avant d'atteindre le fromage en partant de la **pièce** 2

Temps de récurrence moyen

- Une autre quantité d'intérêt est le **temps de récurrence moyen**
- Il s'agit du nombre de déplacements **moyen** à effectuer pour passer d'un état s_i à lui-même
- Comme la chaîne est **ergodique**, on retourne nécessairement d'un état à lui-même avec probabilité 1
- On dénote le temps de récurrence moyen de l'état s_i par r_i

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une chaîne de Markov **ergodique** et
- Soit $\mathbf{w}$ est le vecteur de probabilité **fixe** de $\mathbf{P}$
- Alors

$$r_i = 1/w_i.$$

Notation matricielle

- Soit $\mathbf{M}$ la matrice dont l'entrée $m[i,j]$ est le temps moyen de **premier passage** de l'état s_i à l'état s_j
- Soit $\mathbf{D}$ la matrice **diagonale** dont l'entrée $D[i,i]$ décrit le **temps moyen de récurrence** de l'état s_i
- Soit $\mathbf{1}$ une matrice dont **toutes les entrées** sont 1
- On a alors l'équation matricielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{M} + \mathbf{1} - \mathbf{D},$$

qui se réécrit

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M} = \mathbf{1} - \mathbf{D}.$$

Matrice fondamentale d'une chaîne ergodique

Définition

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne **ergodique**
- Soit $\mathbf{W} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ la matrice **limite**
- Alors la matrice $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1}$ est appelée **matrice fondamentale**

Propriétés

- $\mathbf{Z1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est un vecteur dont les entrées sont 1;
- $\mathbf{wZ} = \mathbf{w}$;
- $\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{W}$.

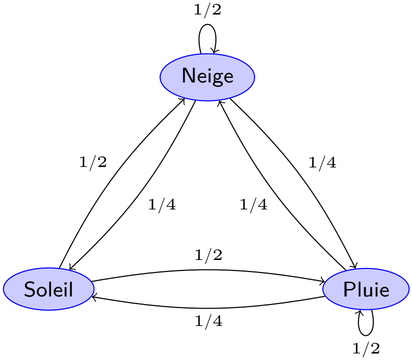
On peut calculer la matrice de **premier passage** $\mathbf{M}$ à partir de $\mathbf{Z}$.

Calcul de la matrice de premier passage

Théorème

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov **ergodique**
- Soit $\mathbf{Z}$ la matrice fondamentale correspondante
- Soit $\mathbf{M}$ la matrice du **temps de premier passage moyen**
- Finalement, soit $\mathbf{w}$ le vecteur de probabilité fixé par $\mathbf{P}$
- Alors
$$m_{ij} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{w_j}.$$

Exemple (1/2)



- Reprenons l'exemple de la météo dans le pays d'Oz
- On avait calculé

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Exemple (2/2)

- On obtient alors

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1} = \begin{pmatrix} 86/75 & 1/25 & -14/75 \\ 2/25 & 21/25 & 2/25 \\ -14/75 & 1/25 & 86/75 \end{pmatrix}$$

- Observons que

$$m_{12} = \frac{z_{22} - z_{12}}{w_2} = \frac{21/25 - 1/25}{1/5} = 4$$

- Lorsqu'on calcule **toutes les entrées**, on trouve

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10/3 \\ 8/3 & 0 & 8/3 \\ 10/3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

- Considérons une **marche aléatoire** sur un cercle de circonférence n;
- À chaque étape, on se déplace dans le sens **horaire** avec probabilité p, où $0 < p < 1$
- Sinon, on se déplace dans le sens **anti-horaire** avec probabilité $1 - p$

Questions

- Est-ce que cette chaîne est **ergodique**? **régulière**?
- Quelle est la valeur du vecteur $\mathbf{w}$?
- Quelle est la valeur de la matrice $\mathbf{M}$ pour $n = 5$ et $p = 1/2$?
- A-t-on $m_{ij} = d(n - d)$, pour toute entrée (i, j), où d est la distance entre i et j sur le cercle?