

Devoir 2

(à remettre au plus tard le 27 mars, à 16h00)

(dans la chute du département d'informatique, située au PK-4150)

Le devoir doit être rédigé **individuellement**. Vous devez **justifier** chacune de vos réponses. **Aucun retard** ne sera accepté puisque la solution sera publiée dans la soirée.

Notes : Préférez une impression recto-verso et agrafez votre devoir. Ne le mettez pas dans une enveloppe, pour éviter de consommer du papier inutilement. Aussi, si vous avez terminé le devoir en avance, vous pouvez me le remettre en mains propres au début ou à la fin du cours.

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Sur	10	20	15	15	10	10	20	100
Note								

1. Soient a, b, m sont des nombres naturels quelconques, où $m \neq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Démontrez les deux identités suivantes à propos de la fonction pgcd.

- (a) (5 points) $\text{pgcd}(ma, mb) = m \cdot \text{pgcd}(a, b)$ *Suggestion :* Posez $a = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$, $b = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_k^{y_k}$ et $m = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_k^{z_k}$, où k est un nombre positif, les exposants x_k , y_k et z_k sont des nombres entiers positifs ou nuls et p_i est un nombre premier pour $i = 1, 2, \dots, k$, puis calculez les pgcd en fonction des exposants.
- (b) (5 points) $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + b, b)$ *Suggestion :* Montrez que les diviseurs communs de a et b sont exactement les diviseurs communs de $a + b$ et b et donc les pgcd doivent être les mêmes.

2. (20 points) Les *mots de Fibonacci* sont définis récursivement comme suit :

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 0 \quad \text{et} \quad f_n = f_{n-1} \cdot f_{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 3,$$

où \cdot est la concaténation de deux mots. Par exemple, $f_3 = f_2 \cdot f_1 = 0 \cdot 1 = 01$, $f_4 = f_3 \cdot f_2 = 01 \cdot 0 = 010$, et ainsi de suite.

- (a) (5 points) Calculez les mots f_n pour $1 \leq n \leq 8$. Pour chacun, indiquez leur longueur ainsi que le nombre de 0 et le nombre de 1 qu'on y trouve. Présentez vos résultats sous la forme d'un tableau.
- (b) (5 points) Montrez par induction que $|f_n|$ est le n -ième nombre de Fibonacci, pour tout entier $n \geq 1$.
- (c) (5 points) Montrez par induction que pour tout $n \geq 3$, le mot f_n termine par 01 si n est impair et par 10 si n est pair.
- (d) (5 points) Montrez par induction que pour tout entier $n \geq 3$, il existe un palindrome p et deux lettres a et b telles que $f_n = pab$. *Indice :* Utilisez (c) et le fait que $f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2}$ pour $n \geq 4$.

3. On dit d'un arbre binaire qu'il est *parfait* si chacun de ses noeuds possède zéro ou deux enfants (autrement dit, il n'y a aucun noeud qui possède exactement un enfant).
- (a) (8 points) Soit T un arbre binaire parfait non vide de n noeuds, dont i noeuds sont internes et f sont des feuilles. Montrez par induction sur n que $f = i + 1$.
- (b) (7 points) Donnez le pseudocode d'un algorithme qui vérifie si un arbre binaire T est parfait ou non. Utilisez l'en-tête de fonction

fonction ESTPARFAIT(T : arbre binaire) : booléen

4. Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ l'alphabet binaire. Pour tout mot u sur Σ et pour tout entier positif n , on définit $W(u, n)$ comme l'ensemble des mots de longueur n sur Σ qui évitent le facteur u et $P(u, n)$ comme l'ensemble des mots de $W(u, n)$ qui sont des palindromes.

Par exemple,

$$W(00, 4) = \{0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111\}.$$

et

$$P(00, 4) = \{0110, 1111\}.$$

- (a) (3 points) Calculez $|W(00, n)|$ pour $0 \leq n \leq 6$.
- (b) (2 points) Calculez $|P(00, n)|$ pour $0 \leq n \leq 6$.
- (c) (5 points) Proposez une formule générale donnant la valeur de $|W(00, n)|$, pour $n \geq 0$ et démontrez-la par induction.
- (d) (5 points) Proposez une formule générale donnant la valeur de $|P(00, n)|$, pour $n \geq 0$ et démontrez-la par induction.
5. (10 points) Dans une région mystérieuse de notre planète, un numéro de téléphone est valide si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :
- Il est formé de 10 chiffres consécutifs entre 0 et 9;
 - Chaque chiffre impair (1, 3, 5, 7 et 9) doit apparaître au moins une fois.

Par exemple, le numéro 4189375351 est valide, puisqu'il contient les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9, mais pas le numéro 012345678, car il ne contient pas le chiffre 9.

Combien existe-t-il de numéros de téléphone valides dans cette région? *Indice* : Principe d'inclusion-exclusion. *Suggestion* : Vous pouvez écrire un programme qui énumère les numéros, mais il prendra sans doute beaucoup de temps pour terminer. Si vous êtes patient, vous pourrez donc l'utiliser pour confirmer votre solution.

6. (10 points) Soit n un entier strictement positif et $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Montrez à l'aide du principe des tiroirs que si on choisit un sous-ensemble B de A constitué de $n + 1$ éléments, alors il en existe au moins 2 qui sont premiers entre eux.

7. Supposez que vous avez n billes identiques devant vous. Vous souhaitez diviser ces n billes en k paquets. Par exemple, si $n = 5$ et $k = 3$, vous pourriez diviser les $n = 5$ billes comme suit : 2 paquets de 2 billes et 1 paquet de 1 bille, pour un total de $k = 3$ paquets, qu'on représente par le triplet $(2, 2, 1)$, appelé *partage*. Plus précisément, un *partage* de n billes en k paquets est un k -uplet (n_1, n_2, \dots, n_k) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ et $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Dénotons par $P(n, k)$ l'ensemble de tous les partages de n billes en k paquets, où chaque paquet contient au moins 1 bille et soit $p(n, k) = |P(n, k)|$.

- (a) (2 points) Montrez que $p(8, 3) = 5$ en calculant $P(8, 3)$.
- (b) (3 points) Calculez les valeurs de $p(n, k)$ pour $1 \leq k \leq n \leq 5$. Présentez votre solution sous forme de tableau.
- (c) (5 points) Les nombres $p(n, k)$ vérifient les égalités suivantes :
- (i) $p(n, k) = 0$ si $n < k$;
 - (ii) $p(n, n) = p(n, 1) = 1$;
 - (iii) $p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$.

Donnez un argument combinatoire qui justifie les égalités (i), (ii) et (iii). *Indice* : Étant donné un partage, il y a deux possibilités : (1) il existe au moins un paquet ayant exactement une bille ou (2) tous les paquets ont au moins deux billes.

- (d) (10 points) Écrivez un générateur dans SageMath (ou Python) qui, étant donnés deux entiers positifs n et k tels que $1 \leq k \leq n$, génère les éléments de l'ensemble $P(n, k)$. Par exemple, si votre fonction est de la forme

```
def paquets(n, k):
    #
    # A compléter
    #
    # Vous devez utiliser le mot réservé
    #
    # yield
    #
    # au moins une fois dans votre code
    # pour obtenir un générateur
    #
```

alors on s'attend à ce que le bout de code suivant

```
for paquet in paquets(9, 4):
    print paquet
```

affiche

```
(6, 1, 1, 1)
(5, 2, 1, 1)
(4, 3, 1, 1)
(4, 2, 2, 1)
(3, 3, 2, 1)
(3, 2, 2, 2)
```

Note : Les équations données à la sous-question (c) cachent un algorithme récursif.