Nom ______________________________

Prénom ______________________________

Code permanent ______________________________

---

# Examen 1

---

Date : 15 février 2017

Titre du cours : Mathématiques algorithmiques

Sigle : MAT1060

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

---

**Instructions**

1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
2) Vous avez droit à une feuille de notes recto-verso ;
3) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
4) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
5) Au besoin, utilisez le verso comme brouillon ;
6) À moins d'avis contraire, justifiez toutes vos réponses et donnez le détail de vos calculs ;
7) Indiquez clairement vos réponses finales ;

---

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sur | 10 | 20 | 20 | 20 | 10 | 20 | 100 |
| Note | | | | | | | |

**Question 1.** ............................................................ (10 points)

Dans cette question, aucune justification n'est requise.

(a) (2 points) Vrai ou faux ? Si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels que $A \oplus B = A \cup B$, alors $A$ et $B$ sont disjoints.

(a) ______________________________

(b) (2 points) Vrai ou faux ? La fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f(n) = 2^n$ est injective.

(b) ______________________________

(c) (2 points) Pour tout nombre naturel $n$, soit

$$D(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid n \bmod m = 0\}$$

et la fonction $f : \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{N}$ dont la règle de correspondance est

$$f(a,b) = \max(D(a) \cap D(b)).$$

La fonction $f$ est très connue en mathématiques. Comment l'appelle-t-on ?

(c) ______________________________

(d) (2 points) Donnez la valeur numérique du plus petit nombre naturel $n$ tel que

$$\sum_{i=0}^{1000} \left(\frac{1}{2}\right)^i \leq n.$$

(d) ______________________________

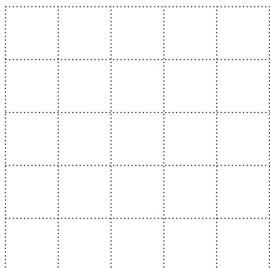
(e) (2 points) Vrai ou faux ? Si $f(n) = n^2 + 3n - 4$, alors $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$.

(e) ______________________________

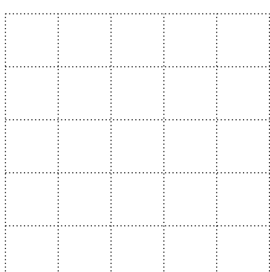
**Question 2**. .............................................................. (20 points)

On définit un *triangle discret* $T(a, b, c, d, e, f)$ comme l'ensemble des points à *coordonnées entières* qui sont à *l'intérieur ou sur la frontière* du triangle induit par les points $(a, b)$, $(c, d)$ et $(e, f)$. En utilisant la grille prévue à cet effet, dessinez chacun des ensembles suivants et donnez sa cardinalité :

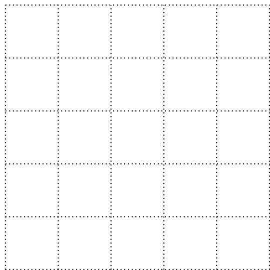
(a) (5 points) $T(0, 0, 0, 2, 1, 1)$



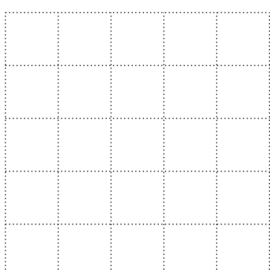
(b) (5 points) $T(1, 1, 3, 0, 2, 2) \cap T(0, 0, 2, 2, 3, 0)$



(c) (5 points) $T(1,1,3,0,2,2) \oplus T(0,0,2,2,3,0)$



(d) (5 points) $T(0,0,a,0,0,b)$ où $a$ et $b$ sont des nombres naturels premiers entre eux.
*Remarque :* La formule de la cardinalité dépend de $a$ et de $b$.



**Question 3**. ................................................................ (20 points)
Soient $f, g, h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ trois fonctions définies par

$$f(x, y, z) = (y, z, x), \quad g(x, y, z) = (x, z, x) \quad \text{et} \quad h(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

(a) (9 points) Indiquez, pour chacune des fonctions, si elle est injective, surjective et bijective en remplissant le tableau suivant avec “oui” ou “non” (aucune justification n’est requise) :

| | Injective ? | Surjective ? | Bijective ? |
|---|---|---|---|
| $f$ | | | |
| $g$ | | | |
| $h$ | | | |

(b) (5 points) Montrez que l’inverse de la fonction $f$ est $f^2$. *Rappel :* $f^2 = f \circ f$.

(c) (6 points) Pour tout entier $n \geq 1$, donnez la règle de correspondance de la fonction $g^n$ (aucune justification requise). *Suggestion :* Calculez d’abord $f^2$, $f^3$, ... et ensuite généralisez.

**Question 4.** ................................................................ (20 points)

Soit $A = \{0, 1\}$ l'alphabet binaire et $A^*$ l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet $A$. On s'intéresse à la fonction

$$\Delta : A^* \to A^*$$

définie par $\Delta(w) = w'$, où $w'$ est le mot dont la $i$-ème lettre est donnée par l'équation

$$w'[i] = (w[i+1] - w[i]) \bmod 2, \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, |w| - 2.$$

Par exemple, si $w = 01001$, alors $w' = \Delta(w) = 1101$ puisque

$$\begin{aligned}
w'[0] &= (w[1] - w[0]) \bmod 2 = (1 - 0) \bmod 2 = 1 \\
w'[1] &= (w[2] - w[1]) \bmod 2 = (0 - 1) \bmod 2 = 1 \\
w'[2] &= (w[3] - w[2]) \bmod 2 = (0 - 0) \bmod 2 = 0 \\
w'[3] &= (w[4] - w[3]) \bmod 2 = (1 - 0) \bmod 2 = 1.
\end{aligned}$$

(a) (4 points) Que vaut $\Delta(1111)$ ?

(a) ____________________________

(b) (4 points) Que vaut $\Delta(001101)$ ?

(b) ____________________________

(c) (4 points) Donnez tous les mots $w$ qui vérifient l'équation $\Delta(w) = 1111$.

(c) ____________________________

(d) (8 points) Vrai ou faux ? Si $w$ est un palindrome, alors $\Delta(w)$ est aussi un palindrome. Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple. *Indice :* $w$ est un palindrome si et seulement si $w[i] = w[|w|-1-i]$ pour $i = 0, 1, \ldots, |w|-1$.

**Question 5**. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (10 points)

Soit $M$ une matrice carrée d'ordre $n$. Donnez le pseudocode d'une fonction qui indique si $M$ est une matrice nulle, c'est-à-dire une matrice dont toutes les entrées sont 0. Utilisez l'en-tête suivante :

**fonction** EstNulle($M$ : matrice carrée d'ordre $n$) : booléen

*Remarque :* Utilisez la notation $M[i][j]$ pour dénoter l'entrée de la matrice $M$ qui se trouve à l'intersection de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne, où $1 \leq i, j \leq n$.

**Question 6**. ........................................................................ (20 points)

Soit $w$ un mot sur un alphabet $A$ et $p$ un naturel tel que $1 \leq p \leq |w|$. On dit que $p$ est une *période* de $w$ si $w[i] = w[i+p]$ pour tout indice $i$ tel que $0 \leq i < |w| - p$ (les indices du mot $w$ commencent donc à 0). Par exemple les nombres 3 et 5 sont des périodes du mot $w = abaaba$, qu'on voit bien si on écrit

$$w = aba \cdot aba = abaab \cdot a.$$

Notez qu'un mot $w$ a toujours un nombre *fini* de périodes puisque $1 \leq p \leq |w|$. De plus, $|w|$ est toujours une période du mot $w$.

(a) (2 points) Donnez toutes les périodes du mot $abaababa$.

(a) ______________________________

(b) (3 points) Donnez toutes les périodes du mot $aaaaa$.

(b) ______________________________

(c) (9 points) Donnez le pseudocode d'un algorithme qui calcule la plus petite période d'un mot donné $w$. Votre algorithme doit avoir une complexité qui est au plus quadratique, c'est-à-dire dans $\mathcal{O}(n^2)$, où $n = |w|$. Utilisez l'en-tête suivante :

**fonction** PlusPetitePériode($w$ : mot) : naturel

(d) (6 points) Analysez la complexité de votre algorithme en utilisant la notation $\mathcal{O}$.