Nom ____

Prénom ____

Code permanent _________________________________

Examen 2

Date : 29 mars 2017

Titre du cours : Mathématiques algorithmiques

Sigle : MAT1060

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

Instructions

1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
2) Vous avez droit à une feuille de notes recto-verso ;
3) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
4) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
5) Au besoin, utilisez le verso comme brouillon ;
6) À moins d'avis contraire, justifiez toutes vos réponses et donnez le détail de vos calculs ;
7) Indiquez clairement vos réponses finales ;

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Sur	10	15	10	15	10	20	20	100
Note								

Question 1. .... (10 points)

Dans cette question, aucune justification n'est requise.

(a) (2 points) Soit A un ensemble défini récursivement par

(i) Si p est un nombre naturel premier, alors $p \in A$;

(ii) Si $m, n \in A$, alors $mn \in A$.

Énumérez tous les éléments de l'ensemble $\mathbb{N} - A$.

(a) ______________________________

(b) (2 points) Donnez une définition récursive par rapport à n de la fonction

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} : (x, n) \mapsto xn.$$

(b) ______________________________

(c) (2 points) Combien existe-t-il de sous-ensembles de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dont la somme ne dépasse pas 7 ?

(c) ______________________________

(d) (2 points) Soit n un nombre naturel. Combien y a-t-il de mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ de longueur $2n$ qui contiennent autant de 0 que de 1 ?

(d) ______________________________

(e) (2 points) Soit L une liste d'entiers. Que retourne la fonction Mystère(L) suivante ?

```
fonction Mystère(L : liste d'entiers) : entier ou −∞
    si L est vide alors
        retourner −∞
    sinon
        Soit x la tête de L (le premier élément de L)
        Soit L' la queue de L (la liste obtenue de L en supprimant x)
        m ← Mystère(L')
        si x > m alors retourner x
        sinon retourner m
    fin si
fin fonction
```

(e) ______________________________

Question 2. .... (15 points)

Soit $A = \{0, 1\}$ l'alphabet binaire habituel. Rappelons que si w est un mot sur A, alors $\widetilde{w}$ est son image-miroir (le mot écrit à l'envers) et $\overline{w}$ est son complément (le mot obtenu en inversant les lettres). On définit un ensemble de mots E de façon récursive à l'aide des règles suivantes :

(i) $0 \in E$;

(ii) Si $w \in E$, alors $\overline{w} \in E$.

(iii) Si $w \in E$, alors $\widetilde{w} \in E$.

(iv) Si $w \in E$, alors $w\overline{w} \in E$;

De plus, soit E_n l'ensemble des mots de E obtenus en appliquant exactement n fois n'importe quelle suite de règles choisies parmi (ii), (iii) et (iv) (la même règle peut être appliquée plusieurs fois).

(a) (5 points) Énumérez tous les éléments de E de longueur au plus 8.

(b) (2 points) Vrai ou faux (justifiez brièvement) ? Tout mot $w \in E$ est un palindrome ou un antipalindrome. *Rappel :* w est un palindrome si et seulement si $w = \widetilde{w}$ et w est un antipalindrome si et seulement si $w = \overline{\widetilde{w}}$.

(c) (8 points) Soit $n \geq 0$ un naturel. Montrez par induction simple sur n que pour tout mot $w \in E_n$, il existe un nombre naturel k tel que $|w| = 2^k$ (c'est-à-dire que la longueur de w est une puissance de 2). *Remarque :* Vous pouvez prendre pour acquis que pour tous mots u et v, on a $|uv| = |u| + |v|$, $|\widetilde{u}| = |u|$ et $|\overline{u}| = |u|$.

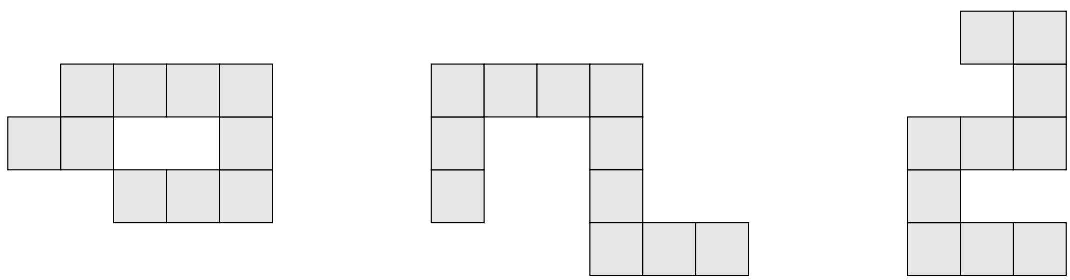
Question 3. .... (10 points)

Soit $n \geq 2$ un nombre naturel. Un *serpentmino de longueur n* est un ensemble de n carrés unités adjacents par **côté** (donc deux carrés unités qui partagent seulement un point ne sont pas adjacents) qui vérifie les conditions suivantes :

(i) Il existe exactement deux carrés unités qui sont adjacents à exactement un seul autre carré unité (on appelle ces deux carrés unités les *extrémités* du serpent) ;

(ii) Tous les autres carrés sont adjacents à exactement deux autres carrés unités.

Le *périmètre* d'un serpentmino est la longueur de son contour. Clairement, comme un serpentmino est formé de carrés unités, son périmètre est toujours un nombre naturel. Voici des exemples de serpentminos de périmètre 22, 24 et 22 respectivement :



Démontrez par induction (simple) sur n que le périmètre d'un serpentmino est $2n + 2$.

Question 4. .... (15 points)

Soit $n \geq 8$ un nombre naturel. L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe deux nombre naturels a et b tels que $n = 3a + 5b$.

(a) (5 points) Montrez que la proposition est vraie pour $n = 8, 9, 10, 11, 12$.

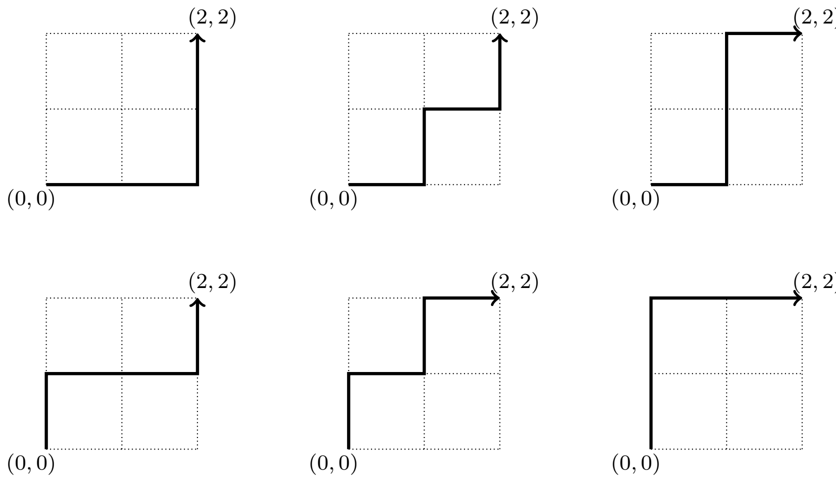
(b) (10 points) Montrez par induction généralisée sur n que la proposition est vraie.

Question 5. .... (10 points)

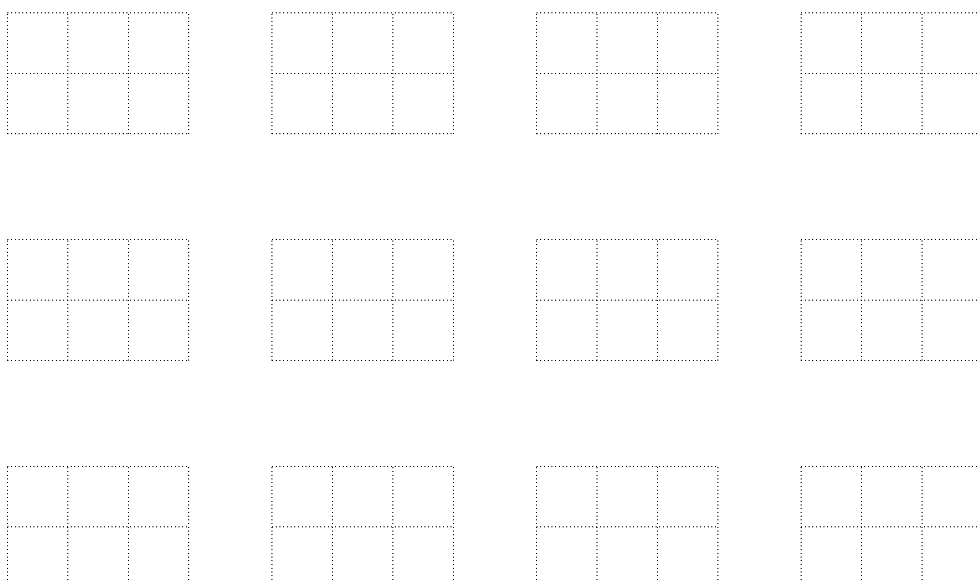
Parmi les nombres de 1 à 300 (inclusivement), combien sont divisibles par 3, par 5 ou par 7 ?

Question 6. .... (20 points)

Soient $m, n \geq 0$ deux entiers. Dans cette question, on s'intéresse au nombre de chemins qu'on peut dessiner sur une grille de dimensions $m \times n$ du point en bas à gauche $(0,0)$ jusqu'au point en haut à droite (m,n) en utilisant seulement des déplacements vers la droite et vers le haut. Par exemple, si $m = n = 2$, alors il existe 6 chemins :



(a) (6 points) Dessinez tous les chemins pour le cas $m = 3$ et $n = 2$. Utilisez les grilles ci-bas. Notez qu'il peut y en avoir moins que 12, même s'il y a 12 grilles qui sont dessinées.



(*suite à la page suivante*)

(*suite de la question 6*)

(b) (12 points) Soit $G(m,n)$ le nombre de chemins qui existent sur une grille de dimension $m \times n$. Donnez des arguments combinatoires qui justifient les égalités suivantes :

(i) $G(m,0) = 1$ pour tout $m \geq 0$;

(ii) $G(0,n) = 1$ pour tout $n \geq 0$;

(iii) $G(m,n) = G(n,m)$ pour tout $m,n \geq 0$.

(iv) $G(m,n) = G(m-1,n) + G(m,n-1)$ pour tout $m,n \geq 1$.

(c) (2 points) Donnez une formule non récursive pour $G(m,n)$ (aucune justification requise).

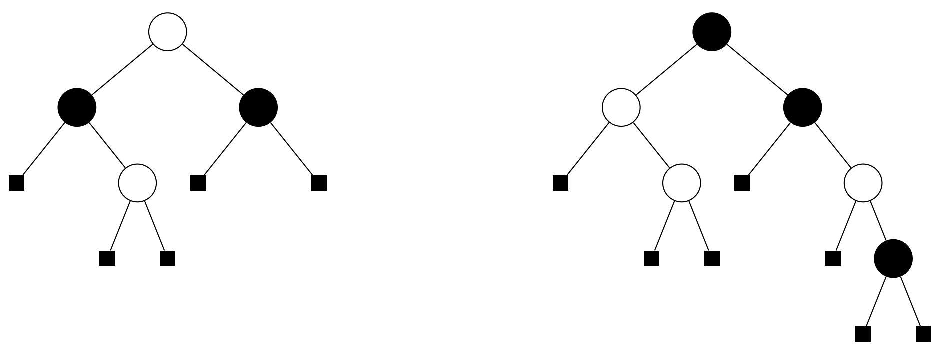
Question 7. .... (20 points)

Soit $C = \{blanc, noir\}$ l'ensemble des deux couleurs *noir* et *blanc*. On définit un arbre *blanc-noir* T récursivement comme suit :

(i) Soit $T = (\emptyset, noir)$, où $\emptyset$ dénote l'arbre *vide* (autrement dit, l'arbre vide est toujours noir) ;

(ii) Soit $T = (G, D, c)$, où G et D sont des arbres blanc-noir, appelés *sous-arbre gauche* et *sous-arbre droit* de T, et $c \in C$ est une couleur.

Voici des exemples d'arbres blanc-noir (les arbres vides sont identifiés par des petits carrés noirs) :



Vous pouvez supposer que pour tout arbre T, la notation suivante est disponible :

- T.ESTVIDE() retourne vrai si et seulement si $T = (\emptyset, noir)$;
- Si T.ESTVIDE(), alors T.COULEUR() retourne toujours *noir* ;
- Si $T = (G, D, c)$, alors T.GAUCHE(), T.DROIT() et T.COULEUR() retournent G, D et c respectivement.

(a) (10 points) Donnez le pseudocode d'une fonction récursive

fonction NBNOEUDS(T : arbre blanc-noir, c : couleur) : naturel

qui retourne le nombre de noeuds de couleur c dans l'arbre T.

(b) (10 points) Soit T un arbre blanc-noir. On dit que T est *fortement noir* s'il n'existe pas de chemin de la racine vers une feuille contenant deux noeuds blancs consécutifs. À la page précédente, l'exemple de gauche est un arbre blanc-noir fortement noir, alors que le deuxième ne l'est pas, puisqu'on trouve deux noeuds blanc consécutifs en effectuant les déplacements *gauche*, *droit* à partir de la racine.

Donnez le pseudocode d'une fonction récursive

fonction EstFortementNoir(T : arbre blanc-noir) : booléen

qui retourne *vrai* si et seulement si T est fortement noir.