

Nom _____

Prénom _____

Code permanent _____

Examen 3

Date : 26 avril 2017

Titre du cours : Mathématiques algorithmiques

Sigle : MAT1060

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

Instructions

- 1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
 - 2) Vous avez droit à toute documentation écrite ;
 - 3) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
 - 4) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
 - 5) Au besoin, utilisez le verso comme brouillon ;
 - 6) À moins d'avis contraire, justifiez toutes vos réponses et donnez le détail de vos calculs ;
 - 7) Indiquez clairement vos réponses finales ;
-

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Sur	20	15	20	15	10	20	100
Note							

Question 1. (20 points)

Pour chacune des deux relations suivantes, dites si elle est réflexive, irreflexive, symétrique, antisymétrique, asymétrique et/ou transitive. Dans chaque cas, justifiez avec une courte démonstration ou un contre-exemple.

- (a) (10 points) La relation P sur l'ensemble de tous les mots binaires définie par uPv si et seulement s'il existe un mot w tel que $u = vw$. Par exemple nous avons $0010 P 00$ puisqu'il suffit de prendre $w = 10$.

- (b) (10 points) La relation D sur \mathbb{Z} définie par xDy si et seulement si $x - y$ est pair.
Par exemple $10 D 64$ puisque $10 - 64 = -54$ qui est bien pair.

Question 2. (15 points)

Nous avons vu en classe que la relation d'ordre lexicographique \leq_{lex} est une relation d'ordre (vous pouvez prendre pour acquis que c'est vrai). Dans cette question, nous nous intéressons à une autre relation d'ordre, appelé *ordre radix*, définie comme suit. Étant donnés deux mots u et v , on écrit $u \leq_{rad} v$ si et seulement si exactement une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $|u| < |v|$;
- (ii) $|u| = |v|$ et $u \leq_{lex} v$.

où $|u|$ et $|v|$ dénotent les longueurs des mots u et v respectivement. Autrement dit, on regarde d'abord la longueur du mot et c'est seulement lorsqu'il y a égalité qu'on utilise l'ordre lexicographique.

Montrez que la relation \leq_{rad} est une relation d'ordre.

Note : La démonstration est assez courte si on utilise le fait que \leq_{lex} est réflexive, antisymétrique et transitive!

Question 3. (20 points)

Considérez le graphe simple $G = (V, E)$ défini par

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

(a) (2 points) Dessinez G .

(b) (8 points) Dessinez les 16 sous-graphes induits de G et identifiez-les par G_1, G_2, \dots, G_{16} .

- (c) (10 points) Étant donnés deux graphes G et G' , on écrit $G \cong G'$ s'il existe un isomorphisme de G vers G' . Il est facile de voir que la relation \cong est une relation d'équivalence (vous n'avez pas à le faire). Donnez les classes d'équivalence de la relation \cong sur l'ensemble $\{G_1, G_2, \dots, G_{16}\}$ des sous-graphes induits que vous avez calculé en (b). Dites combien il y a de classes d'équivalence, et pour chacune d'elle, indiquez combien de graphes elle contient.

Question 4. (15 points)

Nous avons vu en classe certaines familles de graphes simples importantes en mathématiques. Pour chacun des graphes ci-bas, donnez le nombre d'arêtes qu'il possède. Évidemment, la solution dépend des paramètres m et/ou n . Aucune justification n'est demandée.

(a) (3 points) Le graphe complet K_n , où $n \geq 1$;

(a) _____

(b) (3 points) Le cycle C_n , où $n \geq 3$;

(b) _____

(c) (3 points) La roue W_n , où $n \geq 3$;

(c) _____

(d) (3 points) L'hypercube Q_n , où $n \geq 1$;

(d) _____

(e) (3 points) Le graphe biparti complet $K_{m,n}$, où $m, n \geq 1$;

(e) _____

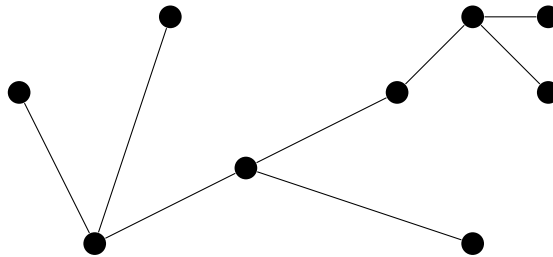
Question 5. (10 points)

Soit $T = (V, E)$ un arbre et $u \in V$. L'*excentricité* du sommet u dans T , dénotée par $\varepsilon(u)$, est la longueur d'une plus grande chaîne élémentaire qu'on peut trouver entre u et un autre sommet de T . Autrement dit,

$$\varepsilon(u) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid v \in V\},$$

où $\text{dist}(u, v)$ est la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v . *Rappel* : La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qu'elle visite. Le *centre* d'un arbre T est l'ensemble des sommets de T dont l'excentricité est la plus petite.

- (a) (4 points) Calculez les excentricités de chacun des sommets de l'arbre ci-bas (vous n'avez qu'à écrire les nombres sur les sommets). Aussi, identifiez le centre de l'arbre en l'encerclant.



- (b) (6 points) Montrez que le centre d'un graphe contient au plus 2 sommets. *Indice* : Procédez par induction généralisée sur le nombre de sommets n dans T .

Question 6. (20 points)

Étant donné un graphe simple G , on suppose que seulement les fonctions suivantes sont disponibles :

- $G.SOMMETS()$ retourne l'ensemble des sommets du graphe G ;
- $G.ARÊTES()$ retourne l'ensemble des arêtes du graphe G ;
- $G.VOISINS(u)$ retourne l'ensemble des voisins du sommet u dans le graphe G ;
- $G.DEGRÉ(u)$ retourne le degré du sommet u dans G ;
- $G.ESTCONNEXE()$ retourne *vrai* si et seulement si G est un graphe connexe.

(a) (10 points) Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction ESTEULÉRIEN(G : graphe simple) : booléen

qui retourne *vrai* si et seulement si G est un graphe eulérien.

- (b) (10 points) Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ et un nombre entier $k \geq 1$, on dit d'une fonction $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ qu'elle est un k -coloriage de G si $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête $\{u, v\} \in E$. Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction ESTCOLORIAGE(G : graphe simple, c : fonction) : booléen

qui retourne *vrai* si et seulement si la fonction c est bien un coloriage de G .