

Exercices

1 Ensembles

1.1 Dites si les égalités suivantes sont vérifiées ou non, peu importe la valeur des ensembles A , B et C . Si c'est le cas, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

(b) $A - (B - C) = (A - B) - C$.

1.2 Que pouvez-vous dire des ensembles A et B si les propriétés suivantes sont vérifiées ?

(a) $B \cup A = A$;

(e) $A \cap B = B \cap A$;

(b) $A - B = A$;

(f) $A \oplus B = A$;

(c) $A - B = B - A$;

(g) $A \oplus A = \phi$;

(d) $A \cap B = A$;

(h) $A \times B = \phi$.

1.3 Soient a et b deux entiers. On définit l'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Par exemple, $3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} + 0 = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ dénote l'ensemble des multiples de 3. À l'aide de la notation $a\mathbb{Z} + b$ lorsque c'est possible, exprimez le plus simplement possible les ensembles suivants :

(a) $(2\mathbb{Z} + 4) \cap (4\mathbb{Z} + 2)$;

(d) $4\mathbb{Z} \oplus 8\mathbb{Z}$;

(b) $3\mathbb{Z} - 6\mathbb{Z}$;

(e) $\bigcup_{i=0}^7 (8\mathbb{Z} + i)$;

(c) $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$;

(f) $\bigcap_{i=2}^5 i\mathbb{Z}$.

1.4 Soient U un ensemble et $A, B, C \subseteq U$ trois sous-ensembles de U . Supposons que les huit conditions suivantes sont vérifiées :

1. $|\mathcal{P}(A \cap B \cap C)| = 256$;

5. $|B| = |C|$;

2. $|B \cap C| = 15$;

6. $|B \oplus C| = 16$;

3. $|A \cap C| = 14$;

7. $|A \times B| = 529$;

4. $|A \cap B| = 13$;

8. $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\mathcal{P}(\phi)|$;

Déterminez la valeur de $|U|$. Montrez votre raisonnement. *Suggestion* : Dessinez un diagramme de Venn et indiquez les cardinalités de chacune des régions au fur et à mesure que vous les déduisez.

2 Fonctions

2.1 Pour chacune des règles de correspondance ci-bas, indiquez si f est une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} :

- (a) $f(x) = 1/x$; (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; (e) $f(x) = 1/(x^2 - 4)$;
 (b) $f(x) = \pm x$; (d) $f(x) = \sqrt{x}$; (f) $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$.

2.2 Considérez une fonction f dont la règle de correspondance est $f(x) = 2x$. Donnez la valeur de

- (a) $f(\mathbb{Z})$; (b) $f(\mathbb{N})$; (c) $f(\mathbb{R})$; (d) $f(S)$,

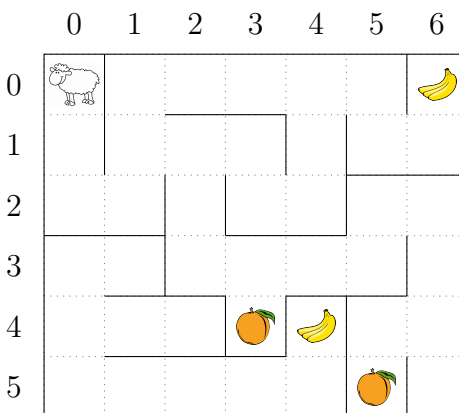
où $S = \{10, 11, 12\}$.

2.3 Dites si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et/ou bijectives. Si elles sont bijectives, donnez leur inverse. Démontrez vos résultats.

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto x + 3$;
 (b) La fonction $f(x) = x + 3$ ayant pour domaine \mathbb{R} et comme codomaine \mathbb{R} ;
 (c) $f : 2^{\mathbb{Z}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$ définie par $f(E) = E \cup \{0\}$;
 (d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto (y, -x)$;
 (e) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, où

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x + 1 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est impair;} \\ \lfloor x + 2 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est pair.} \end{cases}$$

2.4 Soit le labyrinthe décrit par l'image ci-bas :



On représente une case du labyrinthe par un couple (i, j) , où $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aussi, on a les huit ensembles qui suivent :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$A = \left\{ \img alt="banana" data-bbox="505 865 535 885" , \img alt="orange" data-bbox="535 865 565 885" \right\}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \{\text{vrai}, \text{faux}\} \\
 B^4 &= B \times B \times B \times B \\
 L &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 C &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
 L \times C &= \{(i, j) \mid i \in L, j \in C\} \\
 \mathcal{P}(L \times C) &= \{S \mid S \subseteq L \times C\}
 \end{aligned}$$

En choisissant parmi ces huit ensembles, donnez le domaine et le codomaine des fonctions suivantes. Indiquez également pour chacune d'elles s'il s'agit d'une injection, d'une surjection et/ou d'une bijection. Justifiez brièvement.

- La fonction qui indique, pour chaque case (i, j) , s'il existe un chemin à partir du mouton jusqu'à la case (i, j) ;
- La fonction qui, à chaque case (i, j) du labyrinthe, lui associe un quadruplet (p, q, r, s) indiquant si on peut se déplacer d'une case vers la droite, vers le haut, vers la gauche et vers le bas à partir de la case (i, j) .
- La fonction qui indique, pour chaque type de fruit, l'ensemble des cases où on le retrouve;
- La fonction qui indique, pour chaque colonne, le nombre de bananes qu'on y trouve.

2.5 Considérez les règles de correspondance suivantes de la fonction f dont le domaine et le codomaine sont des sous-ensembles de \mathbb{R} . Dans chaque cas, donnez le domaine et le codomaine maximal pour que la fonction soit une bijection et calculez l'inverse de la fonction.

- $f(x) = 2x + 3$;
- $f(x) = 1/(2x + 3)$;
- $f(x) = \log_2(x + 4)$;
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

3 Suites et matrices

3.1 Calculez les 10 premiers termes de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si

- $a_n = (-1)^n 2^n$;
- $a_0 = -1$, $a_n = \lceil \log_2 n \rceil$ si $n \neq 0$;
- $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$;
- $a_0 = 1$, $a_n = n a_{n-1}$ pour $n \geq 1$;
- $a_n = 2n \bmod 7$, c'est-à-dire le reste obtenu en divisant $2n$ par 7.

3.2 Calculez la somme $\sum_{i \in A} i$ si :

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A = \{1, 2, \dots, n\}$;
- A est l'ensemble des multiples de 3 entre 5 et 100;

(d) $A = \{4^i + 3i + 1 \mid i \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq i \leq 10\}$.

3.3 Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit la *suite des sommes partielles* de a_n comme la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i.$$

Calculez S_n si

- (a) $a_n = 1$;
- (b) $a_n = (-1)^n$;
- (c) $a_n = n$.

3.4 Soit $u = u_1 u_2 \cdots u_m$ et $v = v_1 v_2 \cdots v_n$. Montrez que $\widetilde{uv} = \widetilde{v}\widetilde{u}$.

3.5 Soit w un mot sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. On définit le *complément* de w , qu'on note \bar{w} , comme le mot obtenu de w en inversant les lettres. Par exemple, $\overline{01001} = 10110$. Un *antipalindrome* est un mot w qui vérifie l'égalité $w = \widetilde{\bar{w}}$.

- (a) Donnez le domaine et le codomaine de la fonction $\bar{\cdot}$. Est-ce que c'est une injection? Une surjection? Une bijection?
- (b) Énumérez tous les antipalindromes de longueur au plus 7. Combien y en a-t-il pour chaque longueur? Expliquez pourquoi.
- (c) Vrai ou faux? Pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, il existe un antipalindrome de longueur n . Justifiez.

3.6 Donnez l'ensemble des matrices A qui vérifient l'équation

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7 Soit A une matrice carrée d'ordre n de terme générale a_{ij} . La *transposée* de A , notée A^t , est la matrice dont le terme général est a_{ji} , c'est-à-dire la matrice obtenue en inversant les lignes et les colonnes. Par exemple,

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{alors } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour chacun des deux énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donnez-en une démonstration. S'il est faux, donnez un contre-exemple.

- (a) $A + A^t$ est une matrice symétrique pour toute matrice carrée A d'ordre n .
- (b) AA^t est une matrice symétrique pour toute matrice carrée A d'ordre n .

Rappel : Une matrice carrée A d'ordre n est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$.

3.8 Soit la matrice booléenne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calculez $A^{[n]}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
 (b) Donnez une formule générale pour $A^{[n]}$ pour tout entier $n \geq 0$.

4 Algorithmes

Chaque fois qu'on vous demande d'écrire un algorithme, indiquez clairement l'en-tête de la fonction avec les paramètres en entrée et en sortie.

4.1 Considérez un tableau T de nombres entiers trié en ordre croissant, avec répétitions possibles. Écrivez un algorithme qui retourne un *mode* du tableau T , c'est-à-dire une valeur qui est répétée le plus souvent. Par exemple, pour les tableaux suivants

$$T_1 = [1, 1, 2, 2], \quad T_2 = [1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5] \quad \text{et} \quad T_3 = [1, 2, 3, 4, 5],$$

votre algorithme devrait retourner 1 ou 2 dans le premier cas, 4 dans le deuxième cas et n'importe quelle valeur du tableau dans le troisième cas.

4.2 Considérez une chaîne de caractères représentant une expression mathématique, par exemple

$$(4 + 8 * (3 - 9)) / 8 = x * (y - 4)$$

Écrivez un algorithme qui vérifie si l'expression est *bien parenthésée*, c'est-à-dire que chaque parenthèse ouvrante est associée à une parenthèse fermante. *Indice* : Utilisez une variable locale qui compte le nombre de parenthèses ouvrantes rencontrées jusqu'à maintenant dans la chaîne et qui la met à jour chaque fois qu'une parenthèse ouvrante ou fermante est rencontrée.

4.3 Écrivez une fonction qui détermine si un mot est un palindrome. L'en-tête de la fonction devrait être

fonction ESTPALINDROME(w : mot) : booléen

De plus, utilisez les expressions $|w|$ et $w[i]$ pour dénoter respectivement la longueur de w et la i -ème lettre de w .

4.4 Écrivez le pseudocode d'un algorithme qui effectue un tri un tableau par insertion. Un tri par insertion consiste à parcourir le tableau de gauche à droite en plaçant chaque élément au bon endroit dans la partie déjà triée du tableau. Par exemple, supposons que

$$T = [3, 5, 1, 2, 4].$$

Le premier élément est 3, on le laisse donc tel quel. Le deuxième élément est 5, qu'on laisse en cette position puisque $[3, 5]$ est déjà trié. Le troisième élément est 1. On doit donc décaler les éléments 3 et 5 d'une position vers la droite et ensuite, on place l'élément 1 en première position. On continue de cette façon jusqu'à la fin du tableau.

4.5 Considérez le pseudocode suivant :

```

1: fonction MYSTÈRE( $n$  : entier positif ou nul) : entier
2:    $s \leftarrow 0$ 
3:   pour  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  faire
4:      $t \leftarrow 1$ 
5:     pour  $j \in \{0, 1, \dots, i\}$  faire
6:        $t \leftarrow 2 \cdot t$ 
7:     fin pour
8:      $s = s + t$ 
9:   fin pour
10:  retourner  $s$ 
11: fin fonction

```

Calculez le résultat des appels MYSTÈRE(3) et MYSTÈRE(4). Que calcule la fonction MYSTÈRE? Écrivez un algorithme plus simple qui fait la même chose.

4.6 Écrivez le pseudocode d'une fonction

fonction PRODUIT(A, B : matrices) : matrice

qui retourne le produit de deux matrices A et B . Vous pouvez supposer que les matrices A et B sont carrées d'ordre n .

4.7 Écrivez une fonction

fonction ESTSYMÉTRIQUE(A : matrice) : booléen

qui retourne vrai si et seulement si la matrice A est symétrique. Vous pouvez supposer que la matrice A est carrée d'ordre n .

4.8 Soit f une fonction. Pour chacune des règles de correspondance suivantes pour f , indiquez sa croissance asymptotique à l'aide de la notation \mathcal{O} en utilisant une expression la plus simplifiée possible.

- (a) $f(n) = \left(\frac{7}{2}\right)^{n+1}$
- (b) $f(n) = \log(n!)$
- (c) $f(n) = 2^{3 \log_2 n}$;
- (d) $f(n) = n \log(n)$;
- (e) $f(n) = \sqrt{3}$;
- (f) $f(n) = n^2 - 3n + 5$;
- (g) $f(n) = 2^{3^{2n+1}}$;
- (h) $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) + (n + 2)$;
- (i) $f(n) = n \log(n^2) - n \log n$;
- (j) $f(n) = \log(\sqrt{2^{8^3}})$;
- (k) $f(n) = 2^n 3^{n-1} + 2^{n-1} 3^n$.
- (l) $f(n) = \sin(2n\pi/2)$.

4.9 Analysez la complexité de chacun des algorithmes qui ont été présentés plus haut.

4.10 Implémentez chacun des algorithmes qui ont été présentés plus haut.

5 Techniques de démonstration

- 5.1 Démontrez que $\log_2 3$ est irrationnel. *Indice* : Par contradiction et théorème fondamental de l'arithmétique.
- 5.2 L'objectif de cette question est de montrer que le produit de quatre nombres entiers consécutifs est divisible par 24.
- Vérifiez cet énoncé avec trois exemples différents.
 - Donnez-en une démonstration.
- 5.3 L'objectif de cette question est de démontrer que si $p \geq 5$ est un nombre premier, alors $p^2 + 2$ est un nombre composé.
- Vérifiez cette proposition pour vos quatre nombres premiers préférés plus grands ou égaux à 5.
 - Montrez que $p^2 - 1$ est un multiple de 3. *Indice* : Les nombres $p - 1$, p et $p + 1$ sont trois entiers consécutifs.
 - Déduisez de la partie (b) que $p^2 + 2$ est composé. *Note* : Vous pouvez répondre à cette sous-question en supposant la partie (b) vraie même si vous ne l'avez pas réussie.
- 5.4 Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Donnez un contre-exemple ou démontrez l'énoncé le cas échéant.
- La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
 - Le produit d'un nombre irrationnel avec un nombre rationnel est un nombre irrationnel.
 - Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
- 5.5 Vrai ou faux ? Si la somme des diviseurs d'un nombre entier $n \geq 2$ est égale à $n + 1$, alors ce nombre n est premier. Justifiez votre réponse.

6 Récursivité

- 6.1 Montrez par induction sur n que

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

- 6.2 On définit une suite de mots $\{t_n\}$ comme suit :

- $t_0 = 0$;
- $t_{n+1} = t_n \cdot \overline{t_n}$, pour tout entier $n \geq 0$,

où \overline{w} est le mot obtenu en inversant les 0 et les 1 dans le mot w (par exemple $\overline{011} = 100$) et le symbole \cdot désigne la concaténation de deux mots.

- Calculez t_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

- (b) Dans la partie (ii) de la définition de la suite t_n , on voit qu'on exprime t_{n+1} en fonction de t_n . Donnez une formule exprimant t_{n+2} en fonction de t_n (c'est-à-dire sans que t_{n+1} apparaisse), pour tout entier $n \geq 0$.
- (c) Démontrez par induction sur n que t_n est un palindrome si n est pair. *Indice* : Utilisez la formule trouvée en (b).

6.3 La fonction d'Ackermann est définie comme suit :

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0; \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n = 0; \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n = 1; \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n \geq 2, \end{cases}$$

où m et n sont des entiers positifs ou nuls.

- (a) Calculez $A(1, 0)$, $A(0, 1)$, $A(1, 1)$ et $A(2, 2)$.
- (b) Montrez par induction sur m que $A(m, 2) = 4$ lorsque $m \geq 1$.
- (c) Montrez par induction sur n que $A(1, n) = 2^n$ lorsque $n \geq 1$.
- 6.4 Soit A^* l'ensemble des mots binaires sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et soit $S \subseteq A^*$ l'ensemble défini récursivement comme suit :

- (i) $\varepsilon, 0 \in S$;
- (ii) si $w \in S$, alors $0w0 \in S$ et $0w1 \in S$;
- (iii) si $w \in S$, alors $\tilde{w} \in S$.

Étant donné un mot $w \in A^*$, on écrit $|w|_0$ et $|w|_1$ pour indiquer le nombre de 0 et le nombre de 1 respectivement qui apparaissent dans w . Par exemple, $|01001|_0 = 3$ et $|01001|_1 = 2$.

- (a) Donnez tous les mots de longueur au plus 3 qui appartiennent à l'ensemble S .
- (b) Donnez trois mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui n'appartiennent pas à S . Justifiez brièvement.
- (c) Montrez par induction sur la longueur n d'un mot w que si $w \in S$, alors $|w|_0 \geq |w|_1$. *Indice* : La clause (ii) permet de construire des mots de longueur $n+2$ à partir d'un mot de longueur n , alors que la clause (iii) ne modifie pas la longueur.
- 6.5 Rappelons qu'un palindrome est un mot qui se lit de la même façon dans les deux sens, comme "radar" et "icir". Soit \mathcal{C} l'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{a, b\}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \dots\},$$

où ε désigne l'unique mot de longueur 0, appelé *mot vide*. La *longueur* d'un mot est donné par son nombre de lettres.

- (a) Sachant que, par convention, le mot vide est un palindrome, donnez le nombre de palindromes $p(n)$ de longueur n , pour $n = 0, 1, \dots, 7$ dans l'ensemble \mathcal{C} . Présentez votre réponse sous forme de tableau. Justifiez brièvement votre réponse.

- (b) En vous inspirant de votre réponse à la partie (a), donnez une formule donnant le nombre de palindromes $p(n)$ en fonction de la longueur n . Votre réponse devrait ressembler à quelque chose de la forme :

$$p(n) = \begin{cases} ? & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ? & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- (c) Démontrez par induction que la formule donnée en (b) est valide. *Remarque* : vous devrez considérer le cas pair et le cas impair séparément.

7 Algorithmes récursifs

7.1 Plusieurs algorithmes sur les listes peuvent s'exprimer de façon récursive. Donnez le pseudocode d'un algorithme récursif qui retourne

- (a) la longueur d'une liste ;
- (b) vrai si et seulement si un élément donné apparaît dans une liste ;
- (c) le nombre d'occurrences d'un élément donné dans une liste ;
- (d) la somme des éléments d'une liste (bien définie si la liste est vide) ;
- (e) le produit des éléments d'une liste (bien défini si la liste est vide) ;
- (f) l'inverse d'une liste (c'est-à-dire la même liste, mais renversée) ;
- (g) la i -ème permutation circulaire ou conjuguée d'une liste (c'est-à-dire la liste obtenue en plaçant le premier élément en queue de liste, répété i fois).

Contrainte : Les seules fonctions disponibles sont

- $L.TETE()$, qui retourne le premier élément de la liste L si elle est non vide ;
- $L.QUEUE()$, qui retourne la liste obtenue de L en supprimant son premier élément, si L est non vide.
- $L + L'$, qui retourne la concaténation des listes L et L' .
- $x : L$, qui retourne la liste L en insérant l'élément x en première position.

7.2 Soit L une liste triée de longueur n . Donnez le pseudocode d'un algorithme récursif qui vérifie de façon dichotomique si un élément x se trouve ou non dans la liste L . L'en-tête de votre fonction devrait être

fonction CONTIENT(L : liste, x : élément) : boolen

qui retourne vrai si et seulement si x apparaît dans la liste L et elle devrait utiliser une fonction auxiliaire

fonction CONTIENT(L : liste, x : élément, i, j : indices) : boolen

qui retourne vrai si et seulement si x apparaît dans la liste L entre les indices i et j inclusivement.

7.3 Pour toute paire d'entiers i et n tels que $0 \leq i \leq n$, on définit le coefficient binomial de paramètres (n, i) par

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Il est possible de définir les coefficients binomiaux de façon récursive.

(a) Montrez que la relation

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$$

est satisfaite à partir de la définition de coefficient binomial donnée plus haut.

(b) Donnez le pseudocode d'un algorithme récursif qui n'utilise que des additions et qui retourne le coefficient binomial de paramètres (n, i) si $0 \leq i \leq n$.

(c) Donnez le pseudocode d'un algorithme non récursif qui n'utilise que des additions et qui retourne le coefficient binomial de paramètres (n, i) si $0 \leq i \leq n$. *Indice* : Utilisez deux listes pour vous aider, qui contiennent les coefficients binomiaux pour la valeur de n "courante" et une autre pour $n - 1$ (les valeurs "précédentes").

(d) Implémentez les deux algorithmes dans SageMath pour vérifier si votre pseudocode fonctionne.

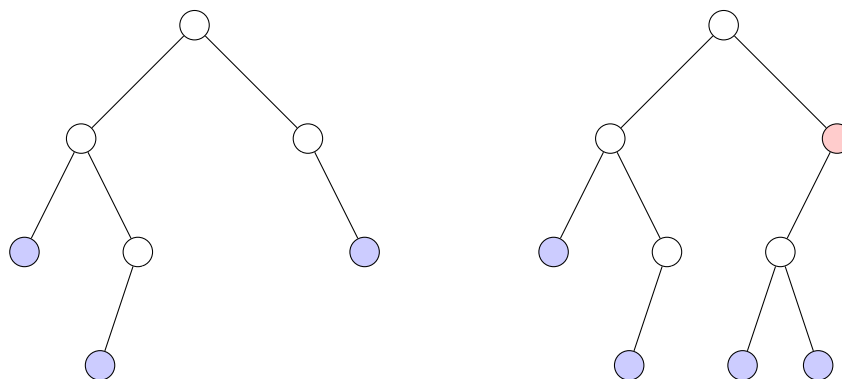
7.4 Un *arbre binaire* A est une structure récursive définie comme suit :

(i) Soit A est l'*arbre vide*, qu'on dénote par ϕ ou

(ii) A est composé d'un *noeud*, d'un *sous-arbre gauche* et d'un *sous-arbre droit*.

Un noeud d'un arbre est appelé *feuille* si ses sous-arbres gauche et droit sont vides. On dit d'un arbre qu'il est *équilibré* si, pour chacun de ses noeuds, le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit ont des hauteurs qui diffèrent d'au plus 1. Dans les deux questions qui suivent, si A n'est pas un arbre vide, alors $A.gauche()$ retourne son sous-arbre gauche et $A.droit()$ retourne son sous-arbre droit. De plus, vous pouvez supposer que l'expression $hauteur(A)$ retourne la hauteur de l'arbre binaire A .

L'image ci-bas illustre la situation. Les feuilles sont colorées en bleu. L'arbre de gauche est équilibré alors que l'arbre de droite ne l'est pas : il y a un déséquilibre au noeud en rouge, puisque le sous-arbre gauche est de hauteur 2 et le sous-arbre droit est de hauteur 0 (différence de $2 > 1$).



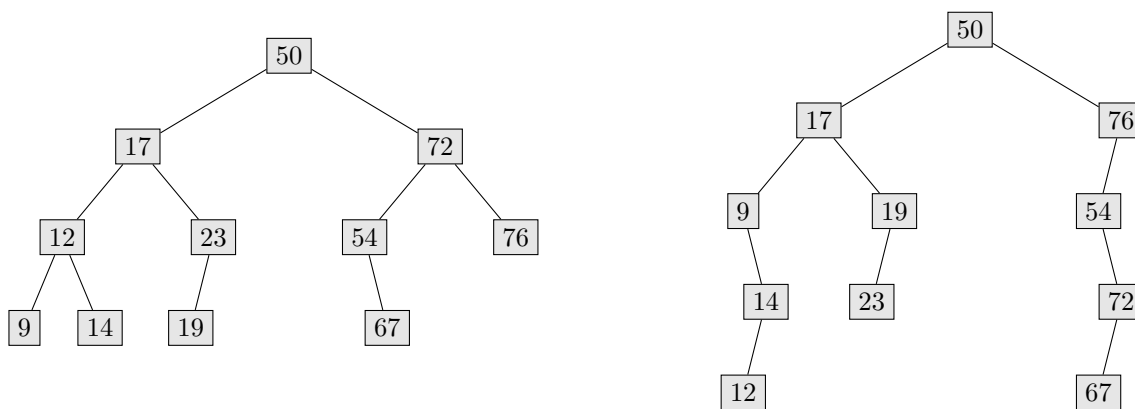
- (a) Écrivez un algorithme récursif qui calcule le nombre de feuilles présentes dans un arbre binaire.
- (b) Écrivez un algorithme récursif qui vérifie si un arbre binaire est équilibré.

Dans les deux cas, indiquez bien l'en-tête de la fonction, les paramètres d'entrée et le type de la valeur de retour.

7.5 Un *arbre binaire de recherche* (ABR) est un arbre binaire dans lequel chaque noeud contient une valeur dans \mathbb{Z} qu'on appelle *clé* et vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Toutes les clés dans le sous-arbre gauche sont strictement plus petites que la clé de la racine ;
- (ii) Toutes les clés dans le sous-arbre droit sont strictement plus grandes que la clé de la racine ;
- (iii) Les sous-arbres gauche et droit sont aussi eux-même des arbres binaires de recherche ;
- (iv) Aucune clé n'apparaît deux fois ou plus.

Par exemple, l'arbre binaire de gauche est un ABR, mais pas celui de droite, car la clé 23 apparaît à gauche de la clé 19.



Donnez le pseudocode d'un algorithme récursif qui vérifie si un arbre binaire est bien un arbre binaire de recherche. L'en-tête de votre fonction devrait être

fonction ESTABR(A : arbre binaire) : booléen

Suggestion : Utilisez une fonction auxiliaire dont l'en-tête est

fonction ESTABR(A : arbre binaire, i, j : entiers ou infini) : booléen

qui retourne vrai si et seulement si A est un arbre binaire dont les clés se trouvent entre i et j inclusivement.

Vous pouvez supposer que les services suivants sont disponibles :

1. $A.GAUCHE()$ retourne le sous-arbre gauche de A ;

2. $A.DROIT()$ retourne le sous-arbre droit de A ;
3. $A.CLÉ()$ retourne la clé qui se trouve dans le noeud à la racine de A .

8 Récurrences et dénombrement

- 8.1 Résolvez les récurrences linéaires homogènes d'ordre 2 suivantes :
- (a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.
 - (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.
- 8.2 Combien de sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ contiennent plus d'un élément ?
- 8.3 Combien y a-t-il de chaînes binaires de longueur entre 5 et 7 qui commencent par deux 0 ou qui terminent par trois 1 ? *Note* : Le "ou" de la phrase précédente est inclusif.
- 8.4 Combien y a-t-il d'entiers entre 1 000 et 2 000 qui sont divisible par au moins un des entiers 3, 5 et 7 ?
- 8.5 Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet binaire.
- (a) Énumérez tous les palindromes sur l'alphabet A de longueur $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;
 - (b) Proposez une formule pour le nombre de palindromes de longueur n .
 - (c) Démontrez par induction votre formule.
 - (d) Proposez, sans démonstration, une formule pour le nombre de palindromes de longueur n sur un alphabet de k lettres.
- 8.6 Soit T_n le nombre d'arbres binaires comprenant n noeuds.
- (a) Énumérez tous les arbres binaires de n noeuds pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et donnez, pour chaque valeur de n , le nombre d'arbres contenant n noeuds.
 - (b) En utilisant le principe du produit et de la somme, montrez que la suite $\{T_n\}$ vérifie les égalités suivantes :

$$C_0 = 1,$$

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

- 8.7 (a) Soient $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ deux points de \mathbb{R}^2 . Donnez une formule pour le point milieu de P_1 et P_2 , c'est-à-dire le point qui se trouve au milieu du segment de droite reliant P_1 et P_2 .
- (b) Supposez que P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont cinq points à coordonnées entières dans \mathbb{Z}^2 . Démontrez qu'il existe au moins une paire de points distincts P_i et P_j dont le point milieu est à coordonnées entières.

9 Générateurs

9.1 Donnez le pseudocode d'une fonction qui génère les entiers $0, 1, \dots, n - 1$ de façon cyclique. Son en-tête devrait être

générateur CYCLIQUE(n : naturel) : naturels

et l'appel de CYCLIQUE(4) devrait retourner un générateur des valeurs :

$0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots$

9.2 Donnez le pseudocode d'une fonction qui génère tous les antipalindromes de longueur n sur un alphabet binaire donné A , pour tout entier $n \geq 0$. Un *antipalindrome* est un mot w qui satisfait l'équation $w = \hat{w}$, où

$$\hat{} = \bar{} \circ \tilde{}$$

Par exemple, si $A = \{0, 1\}$, alors les mots 001011 et 0100011101 sont des antipalindromes. Notez qu'il n'existe aucun antipalindrome de longueur impaire. L'en-tête de votre fonction devrait être

générateur ANTIPALINDROMES(A : alphabet binaire, n : naturel) : mots

On s'attend donc à ce que l'appel de ANTIPALINDROMES($[0, 1], 6$) retourne un générateur des valeurs (pas nécessairement dans cet ordre)

$000111, 001011, 010101, 011001, 100110, 101010, 110100, 111000.$

9.3 L'ensemble D des mots de Dyck sur l'alphabet $\{a, b\}$ est défini récursivement comme suit :

- (i) $\varepsilon \in D$;
- (ii) Si $u, v \in D$, alors $aubv \in D$.

Par exemple, les mots $aabb$ et $ababba$ sont des mots de Dyck. Notez qu'il n'existe aucun mot de Dyck de longueur impaire.

Écrivez une fonction qui génère les mots de Dyck de longueur n . L'en-tête devrait être

générateur MOTSDEDYCK(n : naturel) : mots

On s'attend à ce que l'appel de MOTSDEDYCK(6) retourne un générateur des valeurs (pas nécessairement dans cet ordre)

$ababab, abaabb, aabbab, aababb, aaabbb.$

9.4 Donnez le pseudocode d'une fonction qui génère tous les sous-ensembles d'un ensemble fini donné E . *Rappel* : Si E est un ensemble, alors il existe $2^{|E|}$ sous-ensembles de E .

9.5 Implémentez dans SageMath tous les générateurs demandés dans cette section.

10 Relations et graphes orientés

10.1 Étant donné deux mots u et v , on écrit $u R v$ si et seulement s'il existe une lettre a et un mot w tels que $u = wa$ et $v = aw$.

(a) Calculez tous les mots qui sont en relation avec 01001 et 0101.

(b) Dites si R est

- | | | |
|-----------------|----------------------|------------------|
| i. réflexive, | iii. antisymétrique, | v. irreflexive, |
| ii. symétrique, | iv. transitive, | vi. asymétrique. |

10.2 Soient R et S deux relations réflexives sur un ensemble A . Vrai ou faux? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est réflexive;

(b) $R \cap S$ est réflexive;

(c) $R - S$ est réflexive;

(d) $R \circ S$ est réflexive.

10.3 Soient R et S deux relations symétriques sur un ensemble A . Vrai ou faux? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est symétrique;

(b) $R \cap S$ est symétrique;

(c) $R - S$ est symétrique;

(d) $R \circ S$ est symétrique.

10.4 Soient R et S deux relations transitives sur un ensemble A . Vrai ou faux? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est transitive;

(b) $R \cap S$ est transitive;

(c) $R - S$ est transitive;

(d) $R \circ S$ est transitive.

10.5 Considérons la relation sur \mathbb{R} définie par $x R y$ si et seulement si $|x - y| \leq 1$. Donnez une règle simple qui permet de décider si $x R^n y$, pour tout entier naturel n .

10.6 Soit $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une bijection. On dit que I est une *isométrie du plan* si elle préserve les distances, c'est-à-dire que

$$\text{dist}(p, p') = \text{dist}(I(p), I(p')),$$

pour toute paire de points $p, p' \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrez que toute translation de vecteur (a, b) , où $a, b \in \mathbb{R}$, est une isométrie du plan. *Rappel* : La translation de vecteur (a, b) est donnée par

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + a, y + b).$$

- (b) Montrez que la rotation d'angle θ autour de l'origine $(0, 0)$ est une isométrie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. *Rappel* : La matrice représentant la rotation d'angle θ autour de l'origine est

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

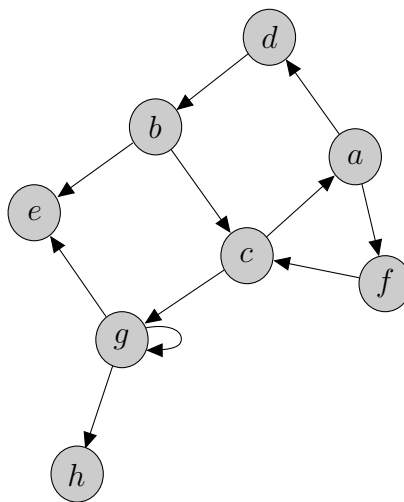
de sorte que

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

- (c) Étant donnés $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, on écrit $A \sim B$ s'il existe une isométrie I telle que $A = I(B)$. Montrez que \sim est une relation d'équivalence. Combien de classes d'équivalence y a-t-il pour la relation \sim ? Donnez une classe d'équivalence qui contient un nombre fini d'éléments.

10.7 Soit G un graphe orienté. On définit la relation \rightarrow sur les sommets de G par $u \rightarrow v$ s'il existe un chemin orienté de u vers v . Aussi, on définit une autre relation \leftrightarrow par $u \leftrightarrow v$ si et seulement si $u \rightarrow v$ et $v \rightarrow u$.

- (a) Montrez que \leftrightarrow est une relation d'équivalence.
 (b) Identifiez les classes d'équivalence de la relation \leftrightarrow pour le graphe ci-bas :



- (c) Soient u et v deux sommets d'un graphe quelconque G . Montrez qu'il existe un circuit passant par u et par v si et seulement si $u \leftrightarrow v$.

10.8 On dit qu'un mot u est un facteur d'un mot v si et seulement si le mot u apparaît dans le mot v .

- (a) Montrez que la relation "être facteur de" est une relation d'ordre.
 (b) S'agit-il d'un ordre total?
 (c) Donnez tous les éléments minimaux et maximaux de cette relation.
 (d) La relation possède-t-elle un minimum? un maximum?

- (e) Quels sont les minorants de l'ensemble $\{01, 010\}$ si l'alphabet est $\{0, 1\}$? Est-ce que $\{01, 010\}$ possède un infimum?
- (f) Dessinez le diagramme de Hasse de la relation si on se restreint aux mots binaires de longueur au plus 3.

11 Graphes simples et arbres

11.1 On dit que deux mots u et v sont *conjugués par une lettre* s'ils peuvent être obtenus l'un par rapport à l'autre en déplaçant la première lettre à la fin ou la dernière lettre au début, c'est-à-dire s'il existe une lettre a et un mot w tels que soit (i) $u = aw$ et $v = wa$ ou bien (ii) $u = wa$ et $v = aw$. Par exemple, 01001 et 10100 sont conjugués, car $01001 = (0100)1$ peut être obtenu de $1(0100) = 10100$ en déplaçant le 1 initial à la fin. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté dont les sommets sont les mots de longueur 4 sur $\{0, 1\}$ et il existe une arête entre deux mots distincts u et v si u et v sont conjugués par une lettre.

- (a) Remplissez le tableau suivant.

Paramètre	Valeur
Nombre de sommets	
Nombre d'arêtes	
Nombre de composantes connexes	
Degré minimum	
Degré maximum	

- (b) Vrai ou faux? Il n'existe aucun cycle simple de longueur 3 dans G . Justifiez.

11.2 Soit G un graphe de n sommets et m arêtes, où $n \geq 2$. Montrez par induction sur n que si G est connexe, alors $m \geq n - 1$.

11.3 Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction ESTCONNEXE(G : graphe simple) : booléen

qui retourne vrai si et seulement si le graphe G est connexe. Vous pouvez supposer que les opérations de base suivantes sur les graphes sont disponibles :

- G .SOMMETS() retourne l'ensemble des sommets de G ;
- G .ARÊTES() retourne l'ensemble des arêtes de G ;
- G .VOISINS(u) retourne l'ensemble des voisins du sommet u dans G .

11.4 Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction ESTEUCLIDIEN(G : graphe simple) : booléen

qui retourne vrai si et seulement si le graphe G est euclidien. *Note* : N'oubliez pas qu'un graphe euclidien doit toujours être connexe. Vous pouvez supposer que les opérations de base suivantes sur les graphes sont disponibles :

- G .SOMMETS() retourne l'ensemble des sommets de G ;
- G .ARÊTES() retourne l'ensemble des arêtes de G ;
- G .VOISINS(u) retourne l'ensemble des voisins du sommet u dans G .

11.5 Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, on définit la *distance entre deux sommets* u et v , notée $\text{dist}(u, v)$, comme la longueur d'un plus court chemin entre u et v . Par exemple, $\text{dist}(u, u) = 0$ pour tout $u \in V$ et si u et v sont distincts et reliés par une arête, alors $\text{dist}(u, v) = 1$. Le *diamètre* du graphe G , noté $\text{diam}(G)$, est alors défini comme la distance maximale possible entre n'importe quelle paire de sommets, c'est-à-dire

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

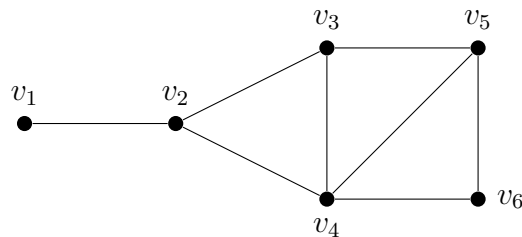
Pour chacune des familles de graphes suivantes, calculez le diamètre.

- (a) K_n le graphe complet sur n sommets, pour $n \geq 2$.
- (b) $K_{m,n}$ le graphe biparti complet sur $m + n$ sommets, pour $m, n \geq 1$.
- (c) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.
- (d) W_n la roue sur $n + 1$ sommets, pour $n \geq 3$.
- (e) Q_n l'hypercube de dimension n , pour $n = 1, 2, 3, 4$.

11.6 Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, on appelle *transversal de cycles* tout ensemble $U \subseteq V$ (possiblement vide) tel que le sous-graphe de G induit par $V - U$ est acyclique (c'est-à-dire ne contient aucun cycle). Autrement dit, U couvre tous les cycles de G . On définit l'*indice cyclique* de G comme la cardinalité d'un plus petit transversal de cycles de G . Pour chacune des familles de graphes suivantes, calculez leur indice cyclique.

- (a) K_n le graphe complet sur n sommets, pour $n \geq 2$.
- (b) $K_{m,n}$ le graphe biparti complet sur $m + n$ sommets, pour $m, n \geq 1$.
- (c) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.
- (d) W_n la roue sur $n + 1$ sommets, pour $n \geq 3$.
- (e) T un arbre quelconque.

11.7 Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $U \subseteq V$. On dit que U est une *couverture des arêtes par les sommets* si pour chaque arête $e = \{u, v\} \in E$, on a $u \in U$ ou $v \in U$. Par exemple, pour le graphe ci-bas,



l'ensemble $U = \{v_2, v_4, v_5\}$ est une couverture des arêtes par les sommets, puisque chaque arête a au moins une extrémité dans U . De plus, on remarque qu'elle est de cardinalité minimum puisqu'il n'existe aucune couverture des arêtes par les sommets n'utilisant que deux sommets. Pour chacune des familles de graphes suivante, indiquez la **cardinalité minimum** d'une couverture des arêtes par les sommets, c'est-à-dire le nombre minimum de sommets nécessaires pour couvrir toutes les arêtes du graphe :

- (a) (2 points) $K_{3,3}$ le graphe biparti complet ayant deux parties de 3 sommets chacune ;
- (b) (2 points) W_5 la roue sur 6 sommets ;
- (c) (2 points) Q_3 l'hypercube de dimension 3 ;
- (d) (2 points) K_n le graphe complet de n sommets, pour $n \geq 1$;
- (e) (2 points) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.

11.8 Démontrez que tout arbre d'au moins 2 sommets admet nécessairement un pont.

- 11.9 (a) Vrai ou faux ? Soit $T = (V, E)$ un arbre et $v \in V$. Alors le sous-graphe de T induit par $V - \{v\}$ est un arbre. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.
- (b) Vrai ou faux ? Soit F une forêt possédant deux composantes connexes. Soient u et v deux sommets de F dans des composantes connexes distinctes de F . Soit G le graphe obtenu en ajoutant l'arête $\{u, v\}$ à la forêt F . Alors G est un arbre. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.