Graphes orientés

Alexandre Blondin Massé

Département d'informatique
Université du Québec à Montréal

12 avril 2017
Mathématiques algorithmiques
MAT1060

Graphe orienté

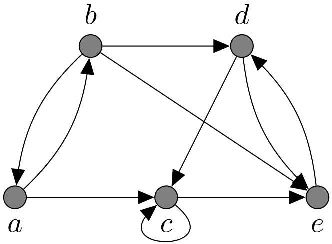
Définition

Un **graphe orienté** est un couple $G = (V, E)$, où

- V est un ensemble (fini) dont les éléments sont appelés **sommets** (en anglais, *vertex*);
- $E \subseteq V \times V$ est un ensemble (fini) dont les éléments sont appelés **arcs** (en anglais, *directed edge* ou *arc*).

Représentation par dessin

On représente souvent un graphe orienté à l'aide d'un **dessin**.



$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e\} \\ E &= \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (b, e), (c, c), (c, e), \\ &\quad (d, c), (d, e), (e, d)\} \end{aligned}$$

Autres définitions de base

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et $u, v \in V$.

- On dit que v est un **prédécesseur** de u si $(v, u) \in E$.
- On dit que v est un **successeur** de u si $(u, v) \in E$.
- On définit l'ensemble des **prédécesseurs de u** par

$$N^-(u) = \{v \in V \mid (v, u) \in E\}$$

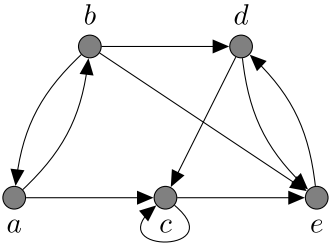
  et l'ensemble des **successeurs de u** par

$$N^+(u) = \{v \in V \mid (u, v) \in E\}.$$

- On définit le **degré intérieur** et le **degré extérieur** par

$$\deg^-(u) = |N^-(u)| \quad \text{et} \quad \deg^+(u) = |N^+(u)|.$$

Exemple



$$
\begin{aligned}
N^-(a) &= \{b\} & \deg^-(a) &= 1\\
N^+(a) &= \{b, c\} & \deg^+(a) &= 2\\
N^-(c) &= \{a, c, d\} & \deg^-(c) &= 3\\
N^+(c) &= \{c, e\} & \deg^+(c) &= 2
\end{aligned}
$$

Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.

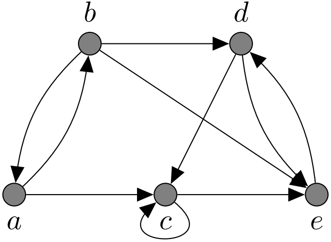
- Un **chemin** (fini) dans G est une suite

$$c = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

  où $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.

- Un chemin est dit **élémentaire** s'il ne passe jamais par le même sommet.
- Un **circuit** est un chemin $c = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tel que $v_1 = v_k$.
- Un circuit est dit **élémentaire** s'il ne passe jamais par le même sommet (sauf le premier et le dernier sommet).

Exemple



- (a, b, e, d) est un chemin élémentaire;
- (a, c, e, d, c) est un chemin non élémentaire;
- (a, b, a) est un circuit élémentaire;
- (c, c) est un circuit élémentaire;
- (c, c, c) est un circuit non élémentaire;

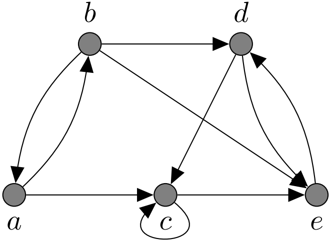
Représentation

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Alors on peut représenter G à l'aide de sa **matrice d'adjacence** M_G :

- Posons $n = |V|$.
- On se choisit un **ordre** sur les sommets v_1, v_2, ..., v_n.
- L'entrée (i, j) est donnée par

$$M_G[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{si } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Exemple



En prenant l'ordre **alphabétique**, on obtient la matrice

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nombre de chemins

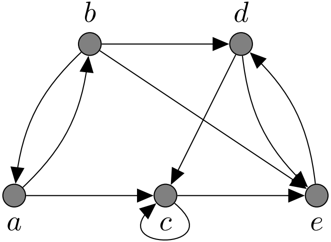
Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et M_G sa matrice d'adjacence. Alors le **nombre de chemins** de longueur k du sommet v_i au sommet v_j est donné par

$$M_G^k[i, j],$$

où M_G^k est la k-ième **puissance** de la matrice M_G.

Exemple



$$M_G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_G^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$