

# Graphes simples

Alexandre Blondin Massé

Département d'informatique  
Université du Québec à Montréal

12 avril 2017

Mathématiques algorithmiques  
MAT1060

# Table des matières

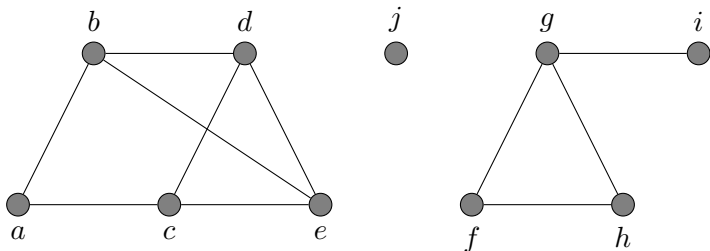
1. Graphes simples
2. Sous-graphes
3. Isomorphismes de graphes
4. Propriétés des graphes
5. Familles classiques

## Définition

Un **graphe simple** est un couple  $G = (V, E)$ , où

- ▶  $V$  est un ensemble (fini) dont les éléments sont appelés **sommets** (en anglais, *vertex*);
- ▶  $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$  est un ensemble (fini) dont les éléments sont appelés **arêtes** (en anglais, *edge*), où  $\mathcal{P}_2(V)$  dénote l'ensemble des **paires** (non ordonnées) de  $V$ .

# Exemple



$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \\ \{f, g\}, \{f, h\}, \{g, h\}, \{g, i\}\}$$

## Autres définitions de base

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple,  $u, v \in V$ .

- ▶ On dit que  $v$  est un **voisin** de  $u$  si  $\{v, u\} \in E$ .
- ▶ On définit l'ensemble des **voisins** par

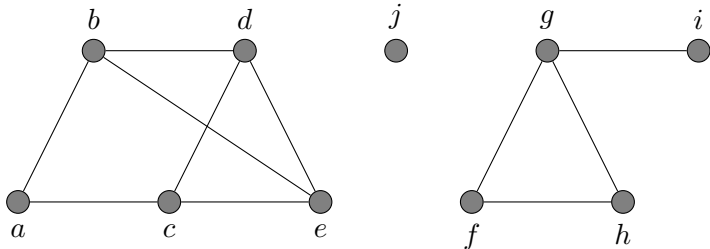
$$N(u) = \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

- ▶ On définit le **degré** par

$$\deg(u) = |N(u)|$$

- ▶ On dit que  $u$  est un **sommet isolé** si  $\deg(u) = 0$ .
- ▶ On dit que  $u$  est un **sommet pendent** si  $\deg(u) = 1$ .

# Exemple

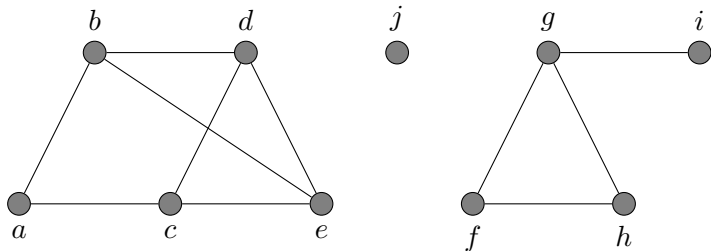


- ▶  $N(b) = \{a, d, e\}$ ;
- ▶  $\deg(g) = 3$ ;
- ▶  $i$  est un sommet pendent;
- ▶  $j$  est un sommet isolé.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

- ▶ Une **chaîne** (finie) dans  $G$  est une suite  $c = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  où  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  pour  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ .
- ▶ Une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne passe jamais par le même sommet.
- ▶ Un **cycle** est une chaîne  $c = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  telle que  $v_1 = v_k$ .
- ▶ Un cycle est dit **élémentaire** s'il ne passe jamais par le même sommet (sauf le premier et le dernier sommet).
- ▶ Un cycle est dit **trivial** s'il contient un sous-chemin de la forme  $(u, v, u)$ , où  $u, v \in V$ .

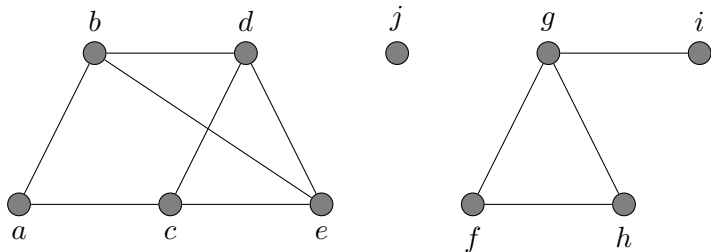
# Exemple



- ▶  $(a, b, e, c, d)$  est une chaîne élémentaire;
- ▶  $(a, b, a, b, a)$  est un cycle trivial;
- ▶  $(a, c, d, b, e, c, a)$  est un cycle (non élémentaire).

- ▶ Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.
- ▶ On définit une relation  $u \leftrightarrow v$  sur  $V$  s'il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ .
- ▶ Il est facile de voir que la relation  $\leftrightarrow$  est une relation d'équivalence.
- ▶ Les classes d'équivalence de la relation  $\leftrightarrow$  sont appelées **composantes connexes** de  $G$ .
- ▶ Si  $G$  possède une unique composante connexe, alors on dit que  $G$  est **connexe**.
- ▶ On dit d'une arête  $e \in E$  qu'elle est un **pont** si sa suppression fait augmenter le nombre de composantes connexes de  $G$ .

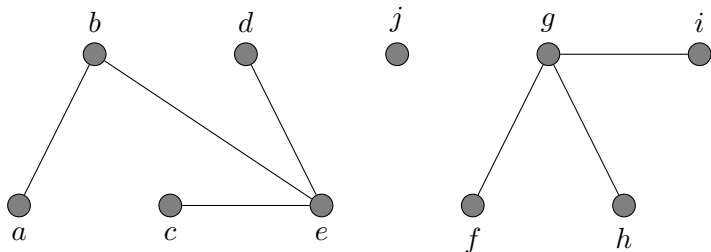
# Exemple



- ▶ Ce graphe possède **3 composantes connexes**;
- ▶ Il possède un seul pont :  $\{g, i\}$ .

- ▶ Un graphe simple est dit **acyclique** si les seuls cycles qu'il possède sont **triviaux**.
- ▶ Un **arbre** est un graphe simple connexe et acyclique.
- ▶ Une **forêt** est un graphe acyclique.
- ▶ **Note :** En particulier, un arbre est aussi une forêt.
- ▶ Une **feuille** d'un arbre ou d'une forêt est un sommet de degré 1 dans cet arbre.

# Exemple



- ▶ Une **forêt** de 3 arbres;
- ▶ Les sommets  $a, c, d, f, h$  et  $i$  sont des feuilles;
- ▶ Le sommet  $j$  n'est pas une feuille.

# Table des matières

1. Graphes simples
2. Sous-graphes
3. Isomorphismes de graphes
4. Propriétés des graphes
5. Familles classiques

## Définition

Soit  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux **graphes simples**. On dit que  $G'$  est un **sous-graphe** de  $G$  si

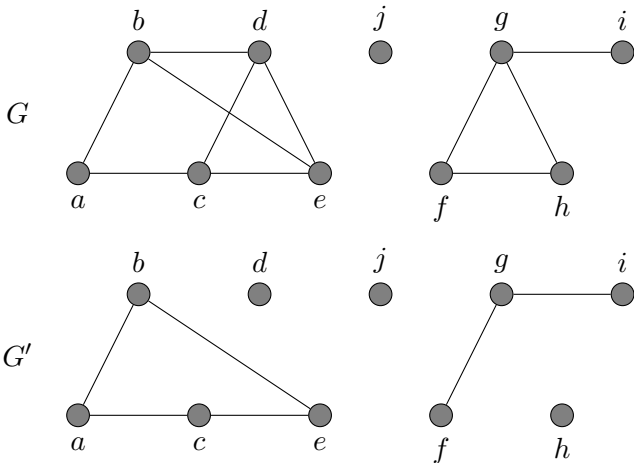
- ▶  $V' \subseteq V$  et
- ▶  $E' \subseteq E$ .

## Définition

Soit  $G = (V, E)$  et  $U \subseteq V$ . Le **sous-graphe induit par  $U$** , noté  $G[U]$ , est le graphe

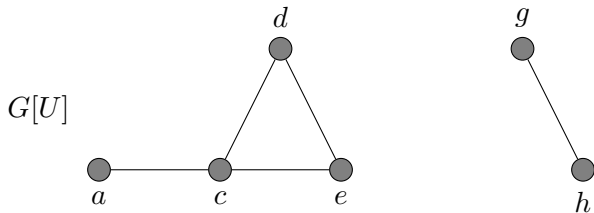
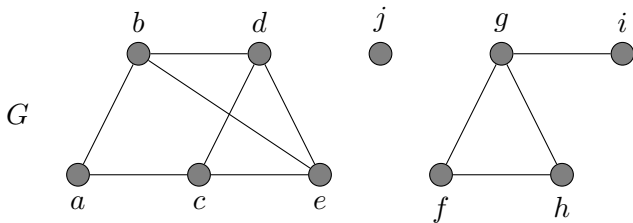
$$G[U] = (U, E \cap \mathcal{P}_2(U)).$$

# Sous-graphe



$G'$  est un **sous-graphe** de  $G$

# Sous-graphe induit



$$U = \{a, c, d, e, g, h\}$$

- ▶ Un **sous-graphe induit** est un **cas particulier** d'un sous-graphe;
- ▶ Plus précisément, un sous-graphe induit est **entièrement déterminé** par ses sommets;
- ▶ Dans un **sous-graphe** (non induit), on peut choisir de conserver ou d'enlever n'importe quelle arête.

# Table des matières

1. Graphes simples
2. Sous-graphes
3. Isomorphismes de graphes
4. Propriétés des graphes
5. Familles classiques

## Définition

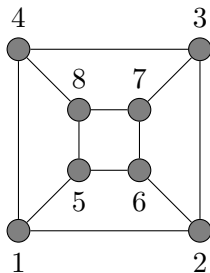
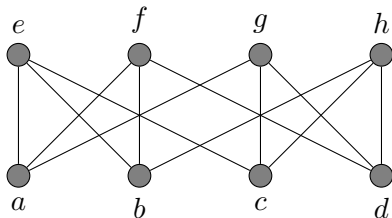
Soit  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux **graphes simples**. Un **isomorphisme** de  $G$  vers  $G'$  est une **bijection**  $f : V \rightarrow V'$  qui préserve l'**adjacence**, c'est-à-dire que

$$\{u, v\} \in E \quad \text{si et seulement si} \quad \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Un **automorphisme** d'un graphe  $G$  est un isomorphisme de  $G$  vers  $G$ .

- ▶ Autrement dit, deux graphes sont **isomorphes** s'ils ont la **même structure**;
- ▶ Il est cependant possible que les **sommets** soient identifiés avec des valeurs **différentes**.

# Exemple



- ▶ Ces deux graphes sont **isomorphes**;
- ▶ Quelle est la **bijection**?

# Décider si deux graphes sont isomorphes

- ▶ De façon générale, il est **très difficile** de décider si deux graphes sont **isomorphes** ou non;
- ▶ Aucun algorithme **polynomial** n'est connu;
- ▶ Par contre, dans certains cas, le problème est **facile** :
  - ▶ Si les graphes n'ont pas le même nombre de **sommets** ou d'**arêtes**;
  - ▶ Si les graphes n'ont pas les **mêmes degrés**;
  - ▶ Si un graphe est **biparti** mais pas l'**autre**, etc.

# Table des matières

1. Graphes simples
2. Sous-graphes
3. Isomorphismes de graphes
4. Propriétés des graphes
5. Familles classiques

## Définition

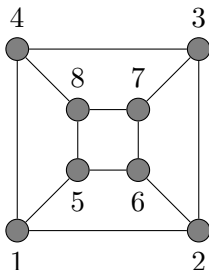
Soit  $G = (V, E)$  un **graphe simple**. On dit que  $G$  est **biparti** s'il existe une partition  $\{V_1, V_2\}$  de  $V$  telle que pour toute arête  $\{u, v\} \in E$ , exactement une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ▶  $u \in V_1$  et  $v \in V_2$ ;
- ▶  $v \in V_1$  et  $u \in V_2$ .

## Théorème

Soit  $G = (V, E)$  un **graphe simple**. Alors  $G$  est **biparti** si et seulement s'il n'admet aucun cycle de longueur **impaire**.

# Exemple



- ▶ Ce graphe est **biparti**;
- ▶ Il suffit de prendre

$$V_1 = \{1, 3, 6, 8\}$$

$$V_2 = \{2, 4, 5, 7\}$$

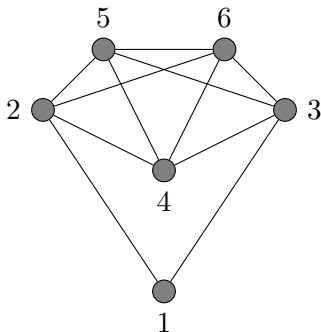
## Définition

Soit  $G = (V, E)$  un **graphe simple**. On dit que  $G$  est **eulérien** s'il existe un **cycle** de  $G$  passant par **chaque arête** exactement une fois.

## Théorème

Soit  $G = (V, E)$  un **graphe simple**. Alors  $G$  est **eulérien** si et seulement s'il est **connexe** et tous ses sommets sont de degré **pair**.

# Exemple



- ▶ Ce graphe est **eulérien**;
- ▶ Un **cycle eulérien** est

(1, 2, 5, 4, 2, 6, 5, 3, 6, 4, 3, 1).

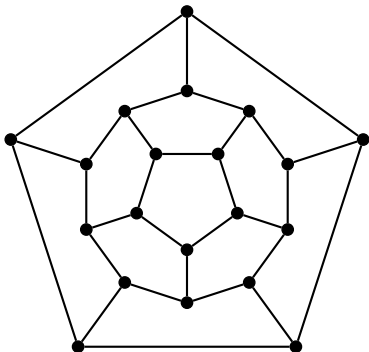
## Définition

Soit  $G = (V, E)$  un **graphe simple**. On dit que  $G$  est **hamiltonien** s'il existe un **cycle** de  $G$  passant par **chaque sommet** exactement une fois.

## Remarque

- ▶ Contrairement aux graphes **eulériens**, il est très **difficile** (de façon générale) de décider si un graphe est **hamiltonien**.
- ▶ Plus précisément, on ne connaît aucun algorithme **polynomial** qui le fait.

# Exemple



Ce graphe est-il **hamiltonien**?

# Table des matières

1. Graphes simples
2. Sous-graphes
3. Isomorphismes de graphes
4. Propriétés des graphes
5. Familles classiques

## Quelques familles importantes

- ▶ Le graphe **complet**  $K_n$ , pour  $n \geq 1$ ;
- ▶ Le **cycle**  $C_n$ , pour  $n \geq 3$ ;
- ▶ La **roue**  $W_n$ , pour  $n \geq 3$ ;
- ▶ L'**hypercube**  $Q_n$ , pour  $n \geq 2$ ;
- ▶ Le **graphe biparti complet**  $K_{m,n}$ , pour  $m, n \geq 1$ .

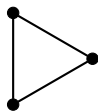
# Le graphe complet $K_n$



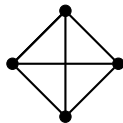
$K_1$



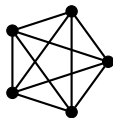
$K_2$



$K_3$



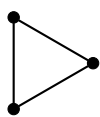
$K_4$



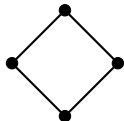
$K_5$

- ▶ Graphe de  $n \geq 1$  **sommets**;
- ▶ **Tous** les sommets sont reliés par une arête.

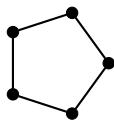
# Le cycle $C_n$



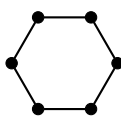
$C_3$



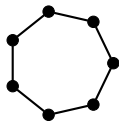
$C_4$



$C_5$



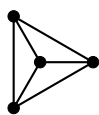
$C_6$



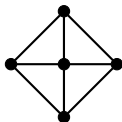
$C_7$

- ▶ Graphe de  $n \geq 3$  **sommets**;
- ▶ Graphe **connexe**;
- ▶ Chaque sommet est de degré 2.

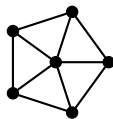
# La roue $W_n$



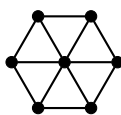
$W_3$



$W_4$



$W_5$



$W_6$



$W_7$

- ▶ Graphe de  $n + 1$  **sommets**, avec  $n \geq 3$ ;
- ▶ Un sommet **central**, relié à tous les autres.
- ▶ Les autres sommets forment un **cycle**.

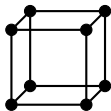
# L'hypercube $C_n$



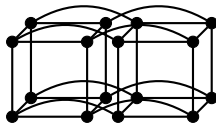
$Q_1$



$Q_2$



$Q_3$



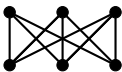
$Q_4$

- ▶ Graphe de  $2^n$  **sommets**, avec  $n \geq 1$ ;
- ▶ Représente un hypercube de **dimension**  $n$ .

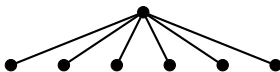
# Le graphe biparti complet $K_{m,n}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{1,6}$

- ▶ Graphe  $m + n$  **sommets**, avec  $m, n \geq 1$ ;
- ▶ **Chacun** des  $m$  sommets est relié aux  $n$  autres sommets.
- ▶ Si deux sommets sont dans la **même partie**, ils ne sont **pas reliés**.

Dites quels graphes parmi  $K_n$ ,  $C_n$ ,  $W_n$ ,  $K_{m,n}$  et  $Q_n$  sont

- ▶ **bipartis;**
- ▶ **eulériens;**
- ▶ **hamiltoniens.**