

Solution du devoir 1

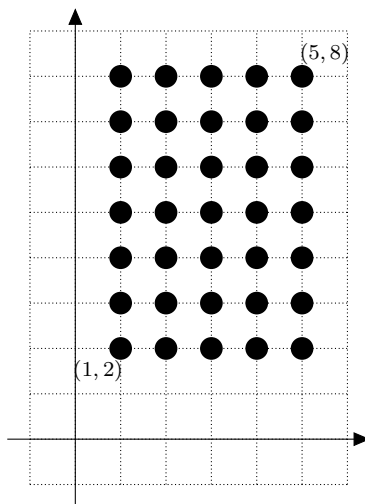
Auteur : Alexandre Blondin Massé

1. (10 points) Soient a, b, c et d quatre nombres entiers tels que $a \leq c$ et $b \leq d$. On définit un *rectangle discret* comme l'ensemble suivant :

$$R(a, b, c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \leq x \leq c \wedge b \leq y \leq d\}.$$

- (a) (2 points) Donnez une formule pour la cardinalité de l'ensemble $R(a, b, c, d)$ en fonction de a, b, c et d , peu importe leur valeur.

Solution: Pour bien comprendre ce qu'est un rectangle discret, dessinons le rectangle $R(1, 2, 5, 8)$:

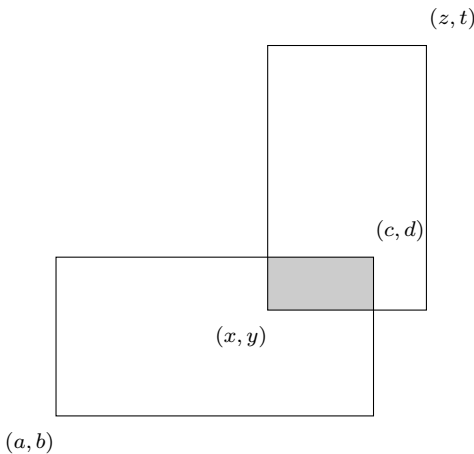


Il suffit donc de compter le nombre de points, qui est $(5 - 1 + 1) \cdot (8 - 2 + 1) = 5 \cdot 7 = 35$. De façon générale, la cardinalité est donnée par la formule

$$|R(a, b, c, d)| = (c - a + 1)(d - b + 1).$$

- (b) (2 points) Considérez huit entiers a, b, c, d, x, y, z, t tels que $a \leq x \leq c \leq z$ et $b \leq y \leq d \leq t$. Exprimez $R(a, b, c, d) \cap R(x, y, z, t)$ comme un rectangle discret. Quelle est sa cardinalité ?

Solution: Voici un dessin représentant la situation



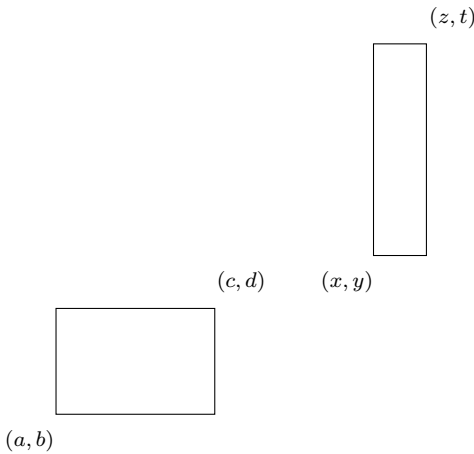
On voit que les contraintes $a \leq x \leq c \leq z$ et $b \leq y \leq d \leq t$ sont bien respectées dans le schéma. L'intersection des deux rectangles est représentée en gris. On voit que c'est bien un rectangle de coin inférieur gauche (x, y) et de coin supérieur droit (c, d) . Ainsi,

$$R(a, b, c, d) \cap R(x, y, z, t) = R(x, y, c, d),$$

qui est de cardinalité $(c - x + 1)(d - y + 1)$.

- (c) (2 points) Même question, mais supposez cette fois-ci que $x > c$ et $y > d$. Que vaut $R(a, b, c, d) \cap R(x, y, z, t)$ et quelle est sa cardinalité ?

Solution: Dans ce cas, les rectangles ont plutôt une disposition de la forme suivante :

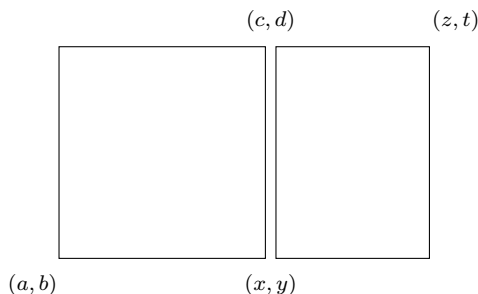


L'intersection des deux rectangles est donc l'ensemble vide, qui est de cardinalité 0.

- (d) (2 points) Toujours la même question, mais en supposant que $y = b$, $x = c + 1$ et

$t = d$. Exprimez $R(a, b, c, d) \oplus R(x, y, z, t)$ comme un rectangle discret et donnez sa cardinalité.

Solution: Voici une représentation de la situation :



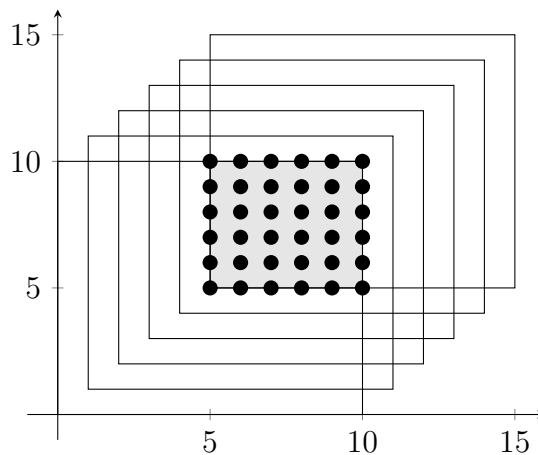
Les points qui appartiennent à la différence symétrique sont ceux qui appartiennent à exactement un des deux rectangles. Comme ils sont disjoints, la différence symétrique est équivalente à la réunion des deux rectangles. Ceux-ci sont adjacents, de sorte que

$$R(a, b, c, d) \oplus R(x, y, z, t) = R(a, b, z, t).$$

La cardinalité est alors $(z - a + 1)(t - b + 1)$.

- (e) (2 points) Exprimez l'ensemble $\bigcap_{i=0}^5 R(i, i, i+10, i+10)$ comme un rectangle discret et donnez sa cardinalité.

Solution: L'intersection de tous ces rectangles est le rectangle $R(5, 5, 10, 10)$, qui apparaît en gris.



Sa cardinalité est $(10 - 5 + 1)(10 - 5 + 1) = 36$.

2. (20 points) Pour tous $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on définit les fonctions

$$\begin{aligned} T_{a,b} &: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 &: (x, y) \mapsto (x + a, y + b), \\ R_{a,b} &: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 &: (x, y) \mapsto (-y + a + b, x - a + b). \end{aligned}$$

(a) (3 points) Montrez que $T_{a,b}$ est une bijection peu importe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$;

Solution: Montrons d'abord que $T_{a,b}$ est injective. Supposons que $T_{a,b}(x, y) = T_{a,b}(z, t)$, où $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$. Alors $(x + a, y + b) = (z + a, t + b)$, ce qui entraîne $x + a = z + a$ et $y + b = t + b$ et donc $x = z$ et $y = t$. Ainsi, $(x, y) = (z, t)$, ce qui montre que c'est bien une injection.

Il reste à vérifier que $T_{a,b}$ est une surjection. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors il suffit de prendre $(x - a, y - b)$ pour atteindre (x, y) . En effet, $T_{a,b}(x - a, y - b) = (x - a + a, y - b + b) = (x, y)$. Ainsi, $T_{a,b}$ est surjective. Comme elle est également injective, on en conclut qu'elle est bijective.

(b) (3 points) Montrez que $R_{a,b}$ est une bijection peu importe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$;

Solution: Montrons qu'elle est injective. Si $R_{a,b}(x, y) = R_{a,b}(z, t)$, alors $(-y + a + b, x - a + b) = (-t + a + b, z - a + b)$. Ceci implique que $-y + a + b = -t + a + b$ et $x - a + b = z - a + b$ et donc $-y = -t$, $x = z$, c'est-à-dire $(x, y) = (z, t)$, montrant qu'on a une injection.

Pour la surjectivité, on peut procéder de plusieurs façons. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On cherche (z, t) tel que $R_{a,b}(z, t) = (x, y)$, c'est-à-dire tel que $(-t + a + b, z - a + b) = (x, y)$. Ceci entraîne que $-t + a + b = x$ et $z - a + b = y$, ce qui se réécrit $-t = x - a - b$, $z = y + a - b$ et donc le couple cherché est $(z, t) = (y + a - b, -x + a + b)$. Ainsi, comme $R_{a,b}(y + a - b, -x + a + b) = (x, y)$, peu importe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on en conclut que $R_{a,b}$ est surjective, et donc bijective.

(c) (2 points) Donnez la règle de correspondance de la fonction $R_{0,0}^2$;

Solution: Il suffit de remplacer a et b par 0 dans la règle de correspondance, ce qui donne

$$\begin{aligned} R_{0,0}^2(x, y) &= (R_{0,0} \circ R_{0,0})(x, y) \\ &= R_{0,0}(R_{0,0}(x, y)) \\ &= R_{0,0}(-y, x) \\ &= (-x, -y). \end{aligned}$$

Ainsi, $R_{0,0}^2 : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 : (x, y) \mapsto (-x, -y)$, ce qui correspond à une rotation de 180° .

(d) (2 points) Donnez la règle de correspondance de la fonction $R_{a,b}^{-1}$.

Solution: La règle se trouve implicitement dans la partie (b) dans laquelle on démontre la surjectivité. Comme il s'agit d'une bijection, on obtient

$$R_{a,b}^{-1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 : (x, y) \mapsto (y + a - b, -x + a + b)$$

(e) (5 points) Vrai ou faux? Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'égalité

$$R_{a,b} = T_{a,b} \circ R_{0,0} \circ T_{-a,-b}$$

est vérifiée. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

Solution: C'est vrai. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a d'une part

$$R_{a,b}(x, y) = (-y + a + b, x - a + b)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (T_{a,b} \circ R_{0,0} \circ T_{-a,-b})(x, y) &= T_{a,b}(R_{0,0}(T_{-a,-b}(x, y))) \\ &= T_{a,b}(R_{0,0}(x - a, y - b)) \\ &= T_{a,b}(-(y - b), x - a) \\ &= (-(y - b) + a, (x - a) + b) \\ &= (-y + a + b, x - a + b), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $R_{a,b}(x, y) = (T_{a,b} \circ R_{0,0} \circ T_{-a,-b})(x, y)$, ce qui montre que l'égalité est satisfaite.

(f) (5 points) Vrai ou faux? Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'égalité

$$R_{a,b} = T_{-a,-b} \circ R_{0,0} \circ T_{a,b}$$

est vérifiée. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

Solution: C'est faux. Il suffit de trouver des valeurs de (a, b) et (x, y) pour lesquelles l'évaluation des fonctions en (x, y) donne des résultats différents. Prenons par exemple $(a, b) = (1, 0)$ et évaluons les expressions en $(1, 2)$. On obtient alors

$$R_{1,0}(1, 2) = (-2 + 1 + 0, 1 - 1 + 0) = (-1, 0)$$

et

$$(T_{-1,0} \circ R_{0,0} \circ T_{1,0})(1, 2) = (T_{-1,0} \circ R_{0,0})(2, 2) = T_{-1,0}(-2, 2) = (-3, 2).$$

mais $(-1, 0) \neq (-3, 2)$.

3. (10 points) Pour chacune des règles de correspondance suivantes, donnez un domaine et un codomaine maximaux pour que la fonction soit bijective :

(a) (2 points) $f(z) = z + 3$;

Solution: La fonction est bijective lorsque le domaine est \mathbb{Z} et le codomaine \mathbb{Z} . Montrons d'abord qu'elle est injective. Supposons que $f(x) = f(y)$. Alors $x + 3 = y + 3$ et donc $x = y$. Par conséquent, f est injective. Maintenant, soit $y \in \mathbb{Z}$. Alors $f(y - 3) = (y - 3) + 3 = y$, ce qui fait que f est surjective (on peut atteindre y en prenant $y - 3 \in \mathbb{Z}$). Ainsi, f est bijective et les domaines sont clairement maximaux.

(b) (4 points) $f(z) = \lfloor (2z + 3)/2 \rfloor$;

Solution: Dans cette situation, il est plus facile de simplifier la fonction. On remarque que

$$f(z) = \left\lfloor \frac{2z + 3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor z + \frac{3}{2} \right\rfloor = z + 1,$$

où la dernière égalité provient du fait que z est entier et donc lui ajouter $3/2$ et arrondir vers le bas revient à lui ajouter 1. En suivant un raisonnement semblable à ce qu'on a présenté en (a), on montre que f est bijective.

(c) (4 points) $f(z) = |z - 5|$.

Solution: On voit que pour tout $z \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(10 - z) = |(10 - z) - 5| = |5 - z| = |z - 5| = f(z - 5),$$

c'est-à-dire que z et $10 - z$ sont envoyés sur la même valeur. Par exemple, si on prend $z = 0$, on a bien que $f(0) = |0 - 5| = 5$ et $f(10) = |10 - 5| = |5| = 5$. Par conséquent, pour que la fonction soit injective, il faut conserver tous les entiers plus grand ou égaux à 5. On prend donc comme domaine $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$ qui peut aussi s'écrire $\mathbb{N} + 5$ (les naturels décalés de 5 vers la droite). La fonction n'est pas surjective si le codomaine est \mathbb{Z} , car une valeur absolue est toujours positive, ce qui fait qu'on n'atteint aucun nombre négatif. On choisit donc \mathbb{N} comme codomaine. Montrons que la fonction est surjective sur \mathbb{N} . Soit $y \in \mathbb{N}$. Alors $f(y + 5) = |y + 5 - 5| = |y| = y$, ce qui fait qu'on atteint y à partir de $y + 5$. En conclusion, $f : \mathbb{N} + 5 \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection. Clairement, le domaine et le codomaine sont maximaux. Si on ajoute une valeur au domaine, alors la fonction n'est plus injective et si on ajoute une valeur au codomaine, cette valeur est négative et ne peut donc pas être atteinte.

Le domaine et le codomaine doivent être des sous-ensembles de \mathbb{Z} . Montrez que la fonction est bien bijective et justifiez pourquoi le domaine et le codomaine sont bien maxi-

maux (c'est-à-dire qu'on ne peut pas les agrandir sans perdre la propriété d'injectivité ou de surjectivité).

4. (10 points) Écrivez les huit premiers termes de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est

(a) (4 points) $a_n = 2n(-1)^n + 3$;

Solution: On obtient les termes suivants :

$$a_0 = 2 \cdot 0(-1)^0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$a_1 = 2 \cdot 1(-1)^1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 2(-1)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \cdot 3(-1)^3 + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$a_4 = 2 \cdot 4(-1)^4 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = 2 \cdot 5(-1)^5 + 3 = -10 + 3 = -7$$

$$a_6 = 2 \cdot 6(-1)^6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

$$a_7 = 2 \cdot 7(-1)^7 + 3 = -14 + 3 = -11$$

- (b) (4 points) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Solution: On trouve :

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 + a_0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 = 2 \cdot 12 + 5 = 29$$

$$a_6 = 2a_5 + a_4 = 2 \cdot 29 + 12 = 70$$

$$a_7 = 2a_6 + a_5 = 2 \cdot 70 + 29 = 169$$

- (c) (2 points) La suite définie à la sous-question (b) est très connue en combinatoire. Quel nom lui donne-t-on?

Solution: C'est la suite de Pell. On trouve sa description par exemple sur l'encyclopédie des suites de nombres entiers à l'adresse suivante : <http://oeis.org/A000129>.

5. (10 points) Étant donné un mot $w = w_1w_2 \cdots w_n$ de longueur n , l'*image-miroir* de w ,

notée \tilde{w} est définie par

$$\tilde{w} = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } w = \varepsilon; \\ a\tilde{u}, & \text{si } w = ua, \text{ où } a \text{ est une lettre et } u \text{ un mot.} \end{cases}$$

Par exemple, $\widetilde{01001} = 10010$. Une propriété de l'opérateur image-miroir est qu'il satisfait l'égalité $\widetilde{uv} = \tilde{v}\tilde{u}$ pour n'importe quels mots u et v (vous n'avez pas à démontrer cette propriété). Un *palindrome* est un mot w qui vérifie l'équation $w = \tilde{w}$. Dites si les affirmations suivantes sont vraies. Si oui, donnez une démonstration, sinon, donnez un contre-exemple.

- (a) (5 points) pq est un palindrome aussitôt que p et q sont des palindromes;

Solution: C'est faux. Il suffit par exemple de prendre $p = 00$ et $q = 111$, qui sont des palindromes, mais $pq = 00111$ ne l'est pas.

- (b) (5 points) pqp est un palindrome aussitôt que p et q sont des palindromes.

Solution: C'est vrai. Démontrons-le. Nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{pqp} &= \widetilde{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{p}} \\ &= pqp, \end{aligned}$$

où la première égalité est obtenue par la propriété donnée et la seconde, puisque p et q sont des palindromes. Comme $\widetilde{pqp} = pqp$, on en conclut qu'il s'agit bien d'un palindrome.

6. (10 points) Soit $A = \{a, b\}$. On dit d'un mot w sur A qu'il est *équilibré* si, pour toute paire de facteur u et v de w de même longueur, on a $||u|_a - |v|_a| \leq 1$, c'est-à-dire qu'ils contiennent presque autant de a que de b . Par exemple, $aaba$ est équilibré, mais pas $aabb$, puisque $||aa|_a - |bb|_a| = |2 - 0| = 2 > 1$. De plus, soit E_n le nombre de mots équilibrés de longueur n et F_n la suite dont le terme général est

$$F_n = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)\varphi(i),$$

où φ est la fonction *indicatrice d'Euler*, c'est-à-dire que $\varphi(i)$ est le nombre d'entiers entre 1 et i qui sont premiers avec i .

- (a) (4 points) Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, énumérez tous les mots équilibrés de longueur n et calculez E_n . *Note* : Bien que ce ne soit pas obligatoire, il peut être intéressant d'écrire un petit programme en SageMath qui énumère ces mots, pour vous assurer de ne pas en avoir oublié.

Solution: On obtient les mots suivants pour chaque longueur :

0 : ε

1 : a, b

2 : aa, ab, ba, bb

3 : $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$

4 : $aaaa, aaab, aaba, abaa, abab, abba, abbb,$
 $baaa, baab, baba, babb, bbab, bbba, bbbb$

5 : $aaaaa, aaaab, aaaaba, aabaa, aabab, abaaa, abaab, ababa,$
 $ababb, abbab, abbba, abbbb, baaaa, baaab, baaba, babaa,$
 $babab, babba, babbb, bbaba, bbabb, bbbab, bbbba, bbbbb$

6 : $aaaaaa, aaaaab, aaaaba, aaabaa, aabaaa, aabaab, aababa, abaaaa, abaaab,$
 $abaaba, ababaa, ababab, ababba, abbaba, abbabb, abbbab, abbbba, abbbbb,$
 $baaaaa, baaaab, baaaba, baabaa, baabab, babaab, bababa, bababb, babbab,$
 $babbaa, babbbb, bbabab, bbabba, bbabbb, bbbabb, bbbbab, bbbbaa, bbbbbb$

de sorte que

$$E_0 = 1$$

$$E_1 = 2$$

$$E_2 = 4$$

$$E_3 = 8$$

$$E_4 = 14$$

$$E_5 = 24$$

$$E_6 = 36.$$

(b) (4 points) Calculez les valeurs F_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Solution: Calculons d'abord les valeurs $\varphi(i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2.$$

Par conséquent,

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = (1 - 1 + 1) \cdot 1 = 1$$

$$F_2 = (2 - 1 + 1) \cdot 1 + (2 - 2 + 1) \cdot 1 = 3$$

$$F_3 = (3 - 1 + 1) \cdot 1 + (3 - 2 + 1) \cdot 1 + (3 - 3 + 1) \cdot 2 = 7$$

$$F_4 = (4 - 1 + 1) \cdot 1 + (4 - 2 + 1) \cdot 1 + (4 - 3 + 1) \cdot 2 \\ + (4 - 4 + 1) \cdot 2 = 13$$

$$F_5 = (5 - 1 + 1) \cdot 1 + (5 - 2 + 1) \cdot 1 + (5 - 3 + 1) \cdot 2 \\ + (5 - 4 + 1) \cdot 2 + (5 - 5 + 1) \cdot 4 = 23$$

$$F_6 = (6 - 1 + 1) \cdot 1 + (6 - 2 + 1) \cdot 1 + (6 - 3 + 1) \cdot 2 \\ + (6 - 4 + 1) \cdot 2 + (6 - 5 + 1) \cdot 4 + (6 - 6 + 1) \cdot 2 = 35.$$

(c) (2 points) Quel est le lien entre E_n et F_n (pas de démonstration requise)?

Solution: On remarque que l'égalité $E_n = F_n + 1$ est vérifiée pour les premières valeurs de n . En fait, cette égalité est vraie pour tout n , mais la démonstration de ce fait dépasse le cadre du cours.

7. (10 points) Écrivez un algorithme qui prend en entrée deux listes ordonnées de nombres entiers (avec répétitions possibles) L_1 et L_2 et qui retourne comme résultat la liste ordonnée résultant de la fusion de L_1 et L_2 . Par exemple, si vous avez les listes

$$L_1 = [2, 2, 5, 8, 9] \quad \text{et} \quad L_2 = [1, 3, 3, 3, 4, 4, 5],$$

vous devriez retourner comme résultat la liste

$$L = [1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 8, 9].$$

Votre algorithme ne doit parcourir qu'une seule fois chacune des listes L_1 , L_2 et L . Aussi, il ne peut pas utiliser d'autres listes auxiliaires hormis la liste résultante L . De plus, étant donné une liste de nombres entiers L , vous devez utiliser la notation $|L|$ pour dénoter la *longueur* de la liste et $L[i]$ pour accéder au i -ème terme de la liste L .

L'en-tête de votre fonction devrait être

fonction FUSIONNERLISTES(L_1, L_2 : listes d'entiers) : liste d'entiers

Indiquez la complexité de votre algorithme à l'aide de la notation \mathcal{O} si les longueurs de L_1 et L_2 sont m et n respectivement.

Solution: La solution est donnée en supposant que les listes sont indicées à partir de 1. Il n'est pas difficile de la modifier en commençant à l'indice 0.

Il suffit de créer deux compteurs i et j qui parcourent chacune des listes de gauche à droite. Selon que la valeur pointée par i ou par j est plus petite, on l'ajoute dans la liste L et on incrémente le bon compteur. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ait terminé de parcourir les deux listes. Voici le pseudocode correspondant.

```

1: fonction FUSIONNERLISTES( $L_1, L_2$  : listes d'entiers)
2:   Soit  $L$  une liste d'entiers de longueur  $|L_1| + |L_2|$ 
3:    $i \leftarrow 1$ 
4:    $j \leftarrow 1$ 
5:    $k \leftarrow 1$ 
6:   tant que  $k \leq |L|$  faire
7:     si  $j > L_2 \vee (i \leq L_1 \wedge L_1[i] \leq L_2[j])$  alors
8:        $L[k] = L_1[i]$ 
9:        $i \leftarrow i + 1$ 
10:    sinon
11:       $L[k] = L_2[j]$ 
12:       $j \leftarrow j + 1$ 
13:    fin si
14:     $k \leftarrow k + 1$ 
15:  fin tant que
16:  retourner  $L$ 
17: fin fonction

```

À noter que la condition $j > L_2$ signifie que la liste L_2 est épuisée et donc qu'il reste à épuiser la liste L_1 . La condition $i \leq L_1 \wedge L_1[i] \leq L_2[j]$ signifie que la valeur courante dans la liste L_1 est plus petite que la valeur courante dans la liste L_2 . Comme chaque élément de la liste est parcouru une seule fois, la complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(m + n)$.

8. (20 points) Étant donné une liste d'entiers L , on appelle *plage de longueur k* une suite de k valeurs consécutives qui se répètent dans L .

(a) (10 points) Écrivez un algorithme qui prend en entrée une liste et qui retourne le couple (i, j) où i est le début d'une plage de longueur maximale dans L et j est l'indice de la fin de la plage. Par exemple, si la liste est donnée par

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L[i]$	1	3	3	2	2	1	1	1	4	1

alors l'algorithme devrait retourner le couple $(6, 8)$, car la plage maximale est $(1, 1, 1)$, commence en position 6 et termine en position 8. Indiquez la complexité de votre algorithme à l'aide de la notation \mathcal{O} si la longueur de la liste L est n .

Note : S'il y a plusieurs plages maximales, vous pouvez retourner n'importe laquelle.
Contrainte : Votre algorithme ne doit parcourir la liste qu'une seule fois et ne doit pas utiliser de liste auxiliaire pour l'aider dans ses calculs. L'en-tête de votre fonction devrait être

fonction PLAGEMAXIMALE(L : liste d'entiers) : couple de nombres naturels

- (b) (10 points) Implémentez votre algorithme en SageMath. Donnez le code correspondant ainsi qu'au moins trois exemples d'exécution pour illustrer que votre implémentation est correcte.

Suggestion : N'hésitez pas à introduire des variables pour vous aider dans votre calcul, par exemple une variable qui conserve la longueur de la plus longue plage trouvée jusqu'à maintenant, la position où cette plage termine, la longueur de la plage courante, etc.

Solution: La solution est donnée en supposant que les listes sont indicées à partir de 0 cette fois, pour simplifier la transition vers le programme en SageMath.

Pour résoudre ce problème, il faut introduire des variables qui conservent les informations pertinentes. Comme on parcourt la liste une seule fois, de gauche à droite, il semble une bonne idée de conserver la longueur r de la plus longue plage trouvée jusqu'à maintenant ainsi que la position i où cette plage termine. Aussi, il est plus simple de garder en mémoire la longueur s de la plage actuelle. Utilisons k comme indice pour parcourir la liste. Voici le pseudocode d'un tel algorithme :

```

1: fonction PLAGEMAXIMALE( $L$  : liste d'entiers) : couple de nombres naturels
2:    $r \leftarrow 1$ 
3:    $s \leftarrow 1$ 
4:    $i \leftarrow 0$ 
5:   pour  $k \in \{1, 2, \dots, |L| - 1\}$  faire
6:     si  $L[k] = L[k - 1]$  alors                                ▷ La plage courante n'est pas terminée
7:        $s \leftarrow s + 1$ 
8:     si  $s > r$  alors                                          ▷ A-t-on trouvé une meilleure plage ?
9:        $r \leftarrow s$ 
10:       $i \leftarrow k$                                           ▷ La plage courante se termine en position  $k$ 
11:     fin si
12:     sinon                                                    ▷ La plage courante est terminée
13:        $s \leftarrow 1$                                           ▷ On réinitialise  $s$ 
14:     fin si
15:   fin pour
16:   retourner  $(i - r + 1, i)$ 
17: fin fonction

```

En Python/SageMath, la fonction est

```
# -*- coding: utf-8 -*-

def plage_maximale(L):
    r"""
    Retourne une plage maximale dans la liste L.

    Une plage est une sous-suite de valeurs consécutives égales.
    Elle est donc maximale si sa longueur est la plus grande
    possible.
    """
    r = 1
    s = 1
    i = 0
    for k in range(1, len(L)):
        if L[k] == L[k - 1]:
            s += 1
            if s > r:
                r = s
                i = k
        else:
            s = 1
    return (i - r + 1, i)

# Exemples
print plage_maximale([0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 0, 0])
print plage_maximale([3, 3, 3, 3, 3, 3])
print plage_maximale([0, 0, 0, 0, 3, 3, 3])
print plage_maximale([0, 0, 0, 3, 3, 3, 3])
```

Et on obtient comme sortie

```
(5, 7)
(0, 5)
(0, 3)
(3, 6)
```