

Nom \_\_\_\_\_

Prénom \_\_\_\_\_

Code permanent \_\_\_\_\_

---

## Solution de l'examen 1

---

Date : 15 février 2017

Titre du cours : Mathématiques algorithmiques

Sigle : MAT1060

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

---

### Instructions

- 1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
  - 2) Vous avez droit à une feuille de notes recto-verso ;
  - 3) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
  - 4) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
  - 5) Au besoin, utilisez le verso comme brouillon ;
  - 6) À moins d'avis contraire, justifiez toutes vos réponses et donnez le détail de vos calculs ;
  - 7) Indiquez clairement vos réponses finales ;
- 

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Sur	10	20	20	20	10	20	100
Note							

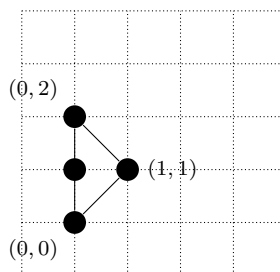


**Question 2.** ..... (20 points)

On définit un *triangle discret*  $T(a, b, c, d, e, f)$  comme l'ensemble des points à *coordonnées entières* qui sont à l'intérieur ou sur la frontière du triangle induit par les points  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  et  $(e, f)$ . En utilisant la grille prévue à cet effet, dessinez chacun des ensembles suivants et donnez sa cardinalité :

- (a) (5 points)  $T(0, 0, 0, 2, 1, 1)$

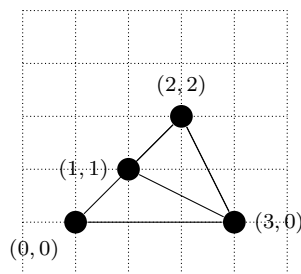
**Solution:**



On voit que  $T(0, 0, 0, 2, 1, 1) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1)\}$  qui a une cardinalité de 4. Il y a 4 points à coordonnées entières sur la frontière ou à l'intérieur du triangle.

- (b) (5 points)  $T(1, 1, 3, 0, 2, 2) \cap T(0, 0, 2, 2, 3, 0)$

**Solution:**



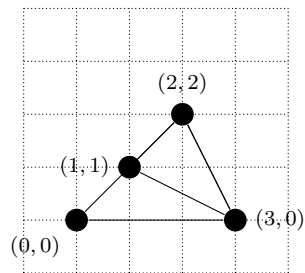
Ainsi,

$$T(1, 1, 3, 0, 2, 2) \cap T(0, 0, 2, 2, 3, 0) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0)\},$$

qui a une cardinalité de 4.

- (c) (5 points)  $T(1, 1, 3, 0, 2, 2) \oplus T(0, 0, 2, 2, 3, 0)$

**Solution:**



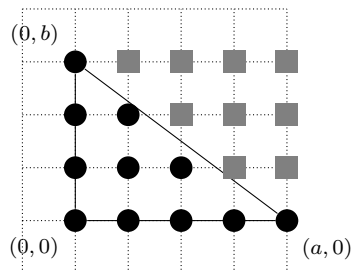
On a les mêmes triangles qu'en (b). La différence symétrique correspond aux points qui appartiennent à un triangle mais pas à l'autre. Par conséquent,

$$T(1, 1, 3, 0, 2, 2) \oplus T(0, 0, 2, 2, 3, 0) = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\},$$

qui a une cardinalité de 3.

- (d) (5 points)  $T(0, 0, a, 0, 0, b)$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres naturels premiers entre eux.  
*Remarque :* La formule de la cardinalité dépend de  $a$  et de  $b$ .

**Solution:**



On remarque que si on complète le triangle avec les carrés gris, on obtient un rectangle contenant  $(a+1)(b+1)$  points. Soit  $C$  la cardinalité cherchée. Il suffit donc de doubler la cardinalité du triangle et d'enlever les points  $(0, b)$  et  $(a, 0)$  qui sont comptés deux fois. Par conséquent,  $2C - 2 = (a+1)(b+1)$ , ce qui nous donne

$$C = |T(0, 0, a, 0, 0, b)| = \frac{(a+1)(b+1)}{2} + 1.$$

**Question 3.** ..... (20 points)

Soient  $f, g, h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$  trois fonctions définies par

$$f(x, y, z) = (y, z, x), \quad g(x, y, z) = (x, z, x) \quad \text{et} \quad h(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

- (a) (9 points) Indiquez, pour chacune des fonctions, si elle est injective, surjective et bijective en remplissant le tableau suivant avec “oui” ou “non” (aucune justification n’est requise) :

	Injective ?	Surjective ?	Bijective ?
$f$	Oui	Oui	Oui
$g$	Non	Non	Non
$h$	Oui	Oui	Oui

- (b) (5 points) Montrez que l’inverse de la fonction  $f$  est  $f^2$ . *Rappel* :  $f^2 = f \circ f$ .

**Solution:** Il suffit de montrer que  $f \circ f^2 = \text{Id} = f^2 \circ f$ , c’est-à-dire que  $f^3 = \text{Id}$ .  
Or,

$$f^3(x, y, z) = f^2(y, z, x) = f(z, x, y) = (x, y, z),$$

de sorte que  $f^3 = \text{Id}$ .

- (c) (6 points) Pour tout entier  $n \geq 1$ , donnez la règle de correspondance de la fonction  $g^n$  (aucune justification requise). *Suggestion* : Calculez d’abord  $f^2, f^3, \dots$  et ensuite généralisez.

**Solution:** On trouve

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= (x, z, x) \\ g^2(x, y, z) &= g(x, z, x) = (x, x, x) \\ g^3(x, y, z) &= g(x, x, x) = (x, x, x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$g^n(x, y, z) = \begin{cases} (x, z, x), & \text{si } n = 1; \\ (x, x, x), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

**Question 4.** ..... (20 points)

Soit  $A = \{0, 1\}$  l'alphabet binaire et  $A^*$  l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet  $A$ . On s'intéresse à la fonction

$$\Delta : A^* \rightarrow A^*$$

définie par  $\Delta(w) = w'$ , où  $w'$  est le mot dont la  $i$ -ème lettre est donnée par l'équation

$$w'[i] = (w[i+1] - w[i]) \bmod 2, \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, |w| - 2.$$

Par exemple, si  $w = 01001$ , alors  $w' = \Delta(w) = 1101$  puisque

$$\begin{aligned} w'[0] &= (w[1] - w[0]) \bmod 2 = (1 - 0) \bmod 2 = 1 \\ w'[1] &= (w[2] - w[1]) \bmod 2 = (0 - 1) \bmod 2 = 1 \\ w'[2] &= (w[3] - w[2]) \bmod 2 = (0 - 0) \bmod 2 = 0 \\ w'[3] &= (w[4] - w[3]) \bmod 2 = (1 - 0) \bmod 2 = 1. \end{aligned}$$

(a) (4 points) Que vaut  $\Delta(1111)$  ?

(a) \_\_\_\_\_ 000.

(b) (4 points) Que vaut  $\Delta(001101)$  ?

(b) \_\_\_\_\_ 01011.

(c) (4 points) Donnez tous les mots  $w$  qui vérifient l'équation  $\Delta(w) = 1111$ .

(c) \_\_\_\_\_ 01010 et 10101.

(d) (8 points) Vrai ou faux? Si  $w$  est un palindrome, alors  $\Delta(w)$  est aussi un palindrome. Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple. *Indice* :  $w$  est un palindrome si et seulement si  $w[i] = w[|w| - 1 - i]$  pour  $i = 0, 1, \dots, |w| - 1$ .

**Solution:** C'est vrai. Démontrons-le. Soit  $w' = \Delta(w)$ . Comme  $w$  est un palindrome, nous avons  $w[i] = w[|w| - 1 - i]$  pour  $i = 0, 1, \dots, |w| - 1$ . Or, si  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ , alors

$$\begin{aligned} w'[|w'| - 1 - i] &= w'[|w| - 2 - i] \\ &= (w[|w| - 2 - i + 1] - w[|w| - 2 - i]) \bmod 2 \\ &= (w[|w| - 1 - i] - w[|w| - 1 - (i + 1)]) \bmod 2 \\ &= (w[i] - w[i + 1]) \bmod 2 \\ &= (w[i + 1] - w[i]) \bmod 2 \\ &= w'[i], \end{aligned}$$

ce qui montre que  $w'$  est un palindrome.



**Question 5.** ..... (10 points)

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . Donnez le pseudocode d'une fonction qui indique si  $M$  est une matrice nulle, c'est-à-dire une matrice dont toutes les entrées sont 0. Utilisez l'en-tête suivante :

**fonction** ESTNULLE( $M$  : matrice carrée d'ordre  $n$ ) : booléen

*Remarque :* Utilisez la notation  $M[i][j]$  pour dénoter l'entrée de la matrice  $M$  qui se trouve à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ième colonne, où  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Solution:** Il suffit d'inspecter toutes les entrées. Dès qu'une entrée est non nulle, on retourne faux. Si toutes les entrées inspectées se sont avérées nulles, alors on retourne vrai. Le pseudocode correspondant est donc :

```
1: fonction ESTNULLE( $M$  : matrice carrée d'ordre  $n$ ) : booléen
2:   pour  $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$  faire
3:     pour  $j \leftarrow 1, 2, \dots, n$  faire
4:       si  $M[i][j] \neq 0$  alors
5:         retourner faux
6:       fin si
7:     fin pour
8:   fin pour
9:   retourner vrai
10: fin fonction
```

**Question 6.** ..... (20 points)

Soit  $w$  un mot sur un alphabet  $A$  et  $p$  un naturel tel que  $1 \leq p \leq |w|$ . On dit que  $p$  est une *période* de  $w$  si  $w[i] = w[i + p]$  pour tout indice  $i$  tel que  $0 \leq i < |w| - p$  (les indices du mot  $w$  commencent donc à 0). Par exemple les nombres 3 et 5 sont des périodes du mot  $w = abaaba$ , qu'on voit bien si on écrit

$$w = aba \cdot aba = abaab \cdot a.$$

Notez qu'un mot  $w$  a toujours un nombre *fini* de périodes puisque  $1 \leq p \leq |w|$ . De plus,  $|w|$  est toujours une période du mot  $w$ .

(a) (2 points) Donnez toutes les périodes du mot *abaababa*.

(a) \_\_\_\_\_ 5, 7 et 8.

(b) (3 points) Donnez toutes les périodes du mot *aaaaaa*.

(b) \_\_\_\_\_ 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

(c) (9 points) Donnez le pseudocode d'un algorithme qui calcule la plus petite période d'un mot donné  $w$ . Votre algorithme doit avoir une complexité qui est au plus quadratique, c'est-à-dire dans  $\mathcal{O}(n^2)$ , où  $n = |w|$ . Utilisez l'en-tête suivante :

**fonction** PLUSPETITEPÉRIODE( $w$  : mot) : naturel

(d) (6 points) Analysez la complexité de votre algorithme en utilisant la notation  $\mathcal{O}$ .

**Solution:** Il suffit d'appliquer directement la définition. La période peut être entre 1 et  $|w|$ , donc on utilise une boucle qui commence avec  $p = 1$  et qui incrémente progressivement la période potentielle. Ensuite, on vérifie si la valeur courante de  $p$  constitue bien une période.

```

1: fonction PLUSPETITEPÉRIODE( $w$  : mot) : naturel
2:   pour  $p \leftarrow 1, 2, \dots, |w|$  faire
3:      $i \leftarrow 0$ 
4:     tant que  $i < |w| - p$  et  $w[i] = w[i + p]$  faire
5:        $i \leftarrow i + 1$ 
6:     fin tant que
7:     si  $i = |w| - p$  alors
8:       retourner  $p$ 
9:     fin si
10:     $p \leftarrow p + 1$ 
11:  fin pour

```

**12: fin fonction**

Analysons maintenant la complexité. Soit  $n = |w|$ . Toutes les opérations s'effectuent en temps constant, de sorte qu'il suffit de calculer le nombre de tours de boucles. La boucle intérieure est répétée au plus  $n - p$  fois et la boucle extérieure  $n$  fois. Nous obtenons donc une complexité temporelle d'au plus

$$\sum_{p=1}^n \sum_{i=0}^{n-p} c = c \sum_{p=1}^n (n - p + 1) = c \left( n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \in \mathcal{O}(n^2),$$

tel que demandé, où  $c$  est une constante.

