Nom ______________________________

Prénom ______________________________

Code permanent ______________________________

Solution de l'examen 3

Date : 26 avril 2017

Titre du cours : Mathématiques algorithmiques

Sigle : MAT1060

Enseignant : Alexandre Blondin Massé

Instructions

1) Vous avez trois heures pour répondre à l'examen ;
2) Vous avez droit à toute documentation écrite ;
3) Il est interdit d'utiliser un ordinateur, peu importe sa taille et sa forme (téléphone portable, agenda électronique, etc.) ;
4) Il est interdit de parler et de prêter de la documentation à un autre étudiant ;
5) Au besoin, utilisez le verso comme brouillon ;
6) À moins d'avis contraire, justifiez toutes vos réponses et donnez le détail de vos calculs ;
7) Indiquez clairement vos réponses finales ;

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Sur	20	15	20	15	10	20	100
Note							

Question 1. .... (20 points)

Pour chacune des deux relations suivantes, dites si elle est réflexive, irréflexive, symétrique, antisymétrique, asymétrique et/ou transitive. Dans chaque cas, justifiez avec une courte démonstration ou un contre-exemple.

(a) (10 points) La relation P sur l'ensemble de tous les mots binaires définie par uPv si et seulement s'il existe un mot w tel que $u = vw$. Par exemple nous avons $0010\ P\ 00$ puisqu'il suffit de prendre $w = 10$.

Solution: P est réflexive. En effet, pour tout mot u, on a uPu, puisque $u = u{\cdot}\varepsilon$.

Elle n'est donc pas irréflexive, puisqu'elle est réflexive et non vide.

Elle n'est pas symétrique. Par exemple, $01\ P\ 0$, mais on n'a pas $0\ P\ 01$.

Elle est antisymétrique. Supposons qu'on ait deux mots u et v tels que uPv et vPu. Alors il existe des mots w et w' tels que

$$u = vw \quad \text{et} \quad v = uw'.$$

Alors $u = vw = uw'w$, ce qui entraîne $w'w = \varepsilon$ et donc $w', w = \varepsilon$. On en déduit que $u = v$.

Elle n'est pas asymétrique, puisqu'elle est réflexive et non vide.

Finalement, elle est transitive. En effet, supposons qu'on ait trois mots u, v et w tels que uPv et vPw. Alors il existe des mots x et y tels que

$$u = vx \quad \text{et} \quad v = wy.$$

On en déduit que $u = vx = (wy)x = w(yx)$, ce qui entraîne uPw.

Bien que ce n'était pas demandé dans la question, on observe que la relation P, qui s'exprime en français par la relation “avoir comme préfixe” est une relation d'ordre.

(b) (10 points) La relation D sur $\mathbb{Z}$ définie par xDy si et seulement si $x - y$ est pair. Par exemple $10\ D\ 64$ puisque $10 - 64 = -54$ qui est bien pair.

Solution: La relation D est réflexive, puisque pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a xDx puisque $x - x = 0$ qui est pair.

Elle n'est donc pas irréflexive, puisqu'elle est réflexive et non vide.

Elle est symétrique. Si xDy, alors $x - y$ est pair et donc $(-1)(x - y) = y - x$ aussi est pair (multiplier par -1 préserve la parité). On en conclut donc que yDx.

Elle n'est pas antisymétrique. Par exemple $2D4$ et $4D2$, mais $2 \neq 4$.

Elle n'est pas asymétrique non plus puisqu'elle est symétrique non vide.

Elle est transitive. En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que xDy et yDz. Alors $x - y$ et $y - z$ sont pairs, c'est-à-dire qu'il existe des entiers m et n tels que $x - y = 2m$ et $y - z = 2n$. On a donc

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 2m + 2n = 2(m + n)$$

qui est pair, de sorte que xDz.

Bien que ce n'était pas demandé dans la question, on observe que D est une relation d'équivalence, qui peut s'exprimer comme “avoir la même parité que”.

Question 2. .... (15 points)

Nous avons vu en classe que la relation d'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ est une relation d'ordre (vous pouvez prendre pour acquis que c'est vrai). Dans cette question, nous nous intéressons à une autre relation d'ordre, appelé *ordre radix*, définie comme suit. Étant donnés deux mots u et v, on écrit $u \leq_{rad} v$ si et seulement si exactement une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) $|u| < |v|$;

(ii) $|u| = |v|$ et $u \leq_{lex} v$.

où $|u|$ et $|v|$ dénotent les longueurs des mots u et v respectivement. Autrement dit, on regarde d'abord la longueur du mot et c'est seulement lorsqu'il y a égalité qu'on utilise l'ordre lexicographique.

Montrez que la relation $\leq_{rad}$ est une relation d'ordre.

Note : La démonstration est assez courte si on utilise le fait que $\leq_{lex}$ est réflexive, antisymétrique et transitive !

Solution: *Réflexive.* Pour tout mot u, nous avons $|u| = |u|$ et $u \leq_{lex} u$ (puisque $\leq_{lex}$ est réflexive). Par (ii), on en déduit donc que $u \leq_{rad} v$.

Antisymétrique. Soient u et v deux mots tels que $u \leq_{rad} v$ et $v \leq_{rad} u$. Nous avons quatre cas à vérifier.

- La condition (i) s'applique deux fois. Alors $|u| < |v|$ et $|v| < |u|$, ce qui est absurde. Ce cas ne peut donc pas survenir.
- La condition (i) s'applique pour $u \leq_{lex} v$ et la condition (ii) s'applique pour $v \leq_{lex} u$. Alors $|u| < |v|$ et $|v| = |u|$, ce qui est aussi absurde. Ce cas ne peut donc pas survenir.
- De façon similaire, on ne peut avoir que la condition (ii) s'applique pour $u \leq_{lex} v$ et que la condition (i) s'applique pour $v \leq_{lex} u$.
- Il reste le cas où la condition (ii) s'applique deux fois. Alors $|u| = |v|$, $u \leq_{lex} v$, $|v| = |u|$ et $v \leq_{lex} u$. Ceci entraîne donc que $u = v$, puisque $\leq_{lex}$ est antisymétrique.

Transitive. Soient u, v, w des mots tels que $u \leq_{rad} v$ et $v \leq_{rad} w$. Encore ici, il y a quatre cas à considérer.

- La condition (i) s'applique deux fois. Alors $|u| < |v|$ et $|v| < |w|$. Ceci entraîne $|u| < |w|$, de sorte que, par la condition (i), nous avons $u \leq_{rad} w$.
- La condition (i) s'applique pour $u \leq_{rad} v$ et la condition (ii) s'applique pour $v \leq_{rad} w$. Alors $|u| < |v| = |w|$, de sorte que $|u| < |w|$. Par la condition (i), on en conclut que $u \leq_{rad} w$.
- De façon similaire, si la condition (ii) pour $u \leq_{rad} v$ et la condition (i) s'applique pour $v \leq_{rad} w$, alors on trouve $|u| = |v| < |w|$, ce qui entraîne $u \leq_{rad} w$, par la condition (i).
- Finalement, supposons que la condition (ii) s'applique deux fois. Alors $|u| = |v| = |w|$, $u \leq_{lex} v$ et $v \leq_{lex} w$. Comme $\leq_{lex}$ est transitive, on en déduit que $u \leq_{lex} w$. Par la condition (ii), ceci entraîne $u \leq_{rad} w$, tel que voulu.

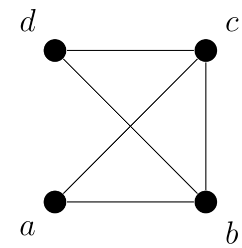
Question 3. .... (20 points)

Considérez le graphe simple $G = (V, E)$ défini par

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \\ E &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} \end{aligned}$$

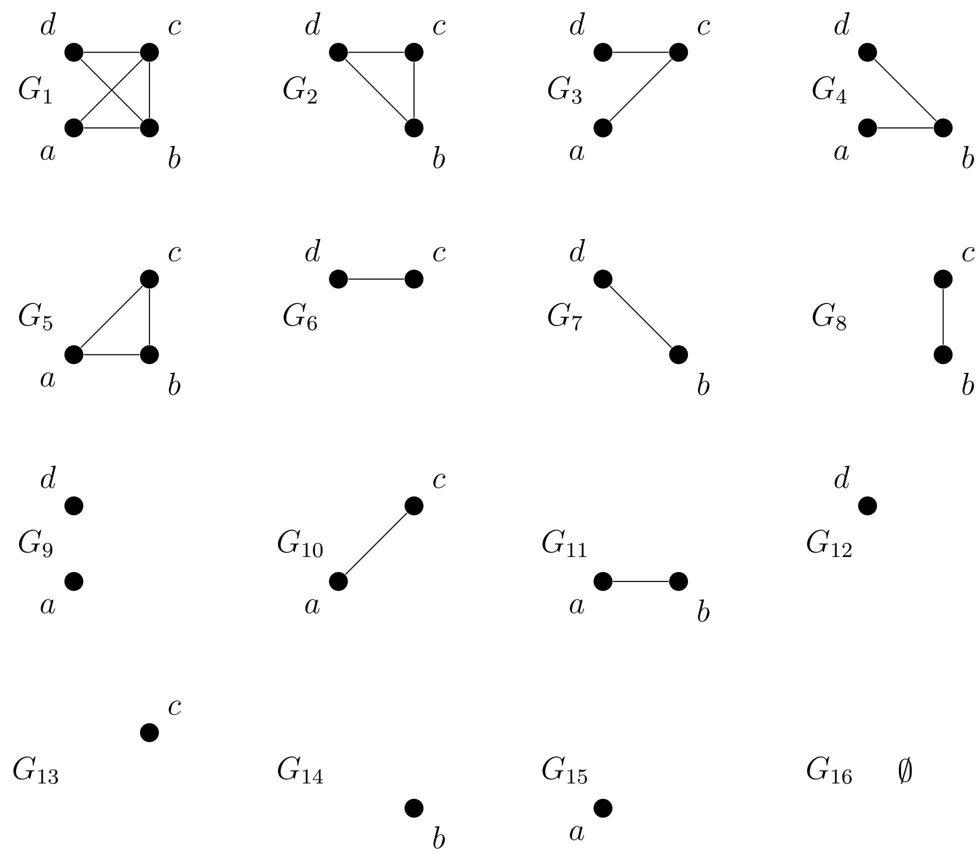
(a) (2 points) Dessinez G.

Solution: On trouve



(b) (8 points) Dessinez les 16 sous-graphes induits de G et identifiez-les par G_1, G_2, ..., G_{16}.

Solution:



(c) (10 points) Étant donnés deux graphes G et G', on écrit $G \cong G'$ s'il existe un isomorphisme de G vers G'. Il est facile de voir que la relation $\cong$ est une relation d'équivalence (vous n'avez pas à le faire). Donnez les classes d'équivalence de la relation $\cong$ sur l'ensemble $\{G_1, G_2, \ldots, G_{16}\}$ des sous-graphes induits que vous avez calculé en (b). Dites combien il y a de classes d'équivalence, et pour chacune d'elle, indiquez combien de graphes elle contient.

Solution: Les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{G_1\} \\
C_2 &= \{G_2, G_5\} \\
C_3 &= \{G_3, G_4\} \\
C_4 &= \{G_6, G_7, G_8, G_{10}, G_{11}\} \\
C_5 &= \{G_9\} \\
C_6 &= \{G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{15}\} \\
C_7 &= \{G_{16}\}.
\end{aligned}$$

Il y a donc 7 classes d'équivalence distinctes, dont 3 contiennent un seul graphe, 2 contiennent deux graphes, 1 contient quatre graphes et 1 contient cinq graphes.

Question 4. .... (15 points)

Nous avons vu en classe certaines familles de graphes simples importantes en mathématiques. Pour chacun des graphes ci-bas, donnez le nombre d'arêtes qu'il possède. Évidemment, la solution dépend des paramètres m et/ou n. Aucune justification n'est demandée.

(a) (3 points) Le graphe complet K_n, où $n \geq 1$;

(a) $n(n-1)/2$.

(b) (3 points) Le cycle C_n, où $n \geq 3$;

(b) n.

(c) (3 points) La roue W_n, où $n \geq 3$;

(c) $2n$.

(d) (3 points) L'hypercube Q_n, où $n \geq 1$;

(d) $2^{n-1}n$.

(e) (3 points) Le graphe biparti complet $K_{m,n}$, où $m, n \geq 1$;

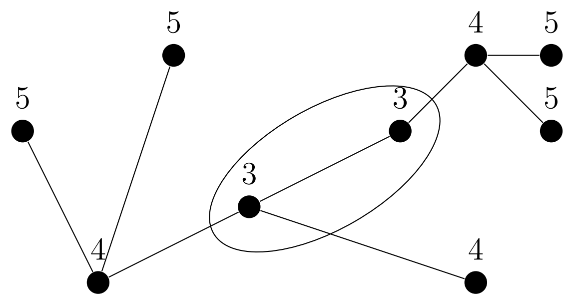
(e) mn.

Question 5. .... (10 points)
Soit $T = (V, E)$ un arbre et $u \in V$. L'*excentricité* du sommet u dans T, dénotée par $\varepsilon(u)$, est la longueur d'une plus grande chaîne élémentaire qu'on peut trouver entre u et un autre sommet de T. Autrement dit,

$$\varepsilon(u) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid v \in V\},$$

où $\text{dist}(u, v)$ est la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v. *Rappel :* La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qu'elle visite. Le *centre* d'un arbre T est l'ensemble des sommets de T dont l'excentricité est la plus petite.

(a) (4 points) Calculez les excentricités de chacun des sommets de l'arbre ci-bas (vous n'avez qu'à écrire les nombres sur les sommets). Aussi, identifiez le centre de l'arbre en l'encerclant.



(b) (6 points) Montrez que le centre d'un graphe contient au plus 2 sommets. *Indice :* Procédez par induction généralisée sur le nombre de sommets n dans T.

Solution: CAS DE BASE. Si $n = 0, 1, 2$, alors comme l'arbre ne contient pas plus de 2 sommets, le nombre de sommets dans le centre est au plus 2 (on n'a pas plus de choix !).

HYPOTHÈSE D'INDUCTION. Supposons que le centre de tout arbre T' de $n' < n$ sommets est constitué d'au plus 2 sommets.

INDUCTION. Notons que T possède au moins 3 sommets. Par conséquent, son centre ne contient aucune feuille. Soit T' l'arbre obtenu de T en supprimant toutes ses feuilles. Alors $\varepsilon_{T'}(u) = \varepsilon_T(u) - 1$ pour tout sommet u interne dans T. En particulier, le centre de T' est donc le même que le centre de T. Par hypothèse d'induction, ce centre est de cardinalité au plus 2, ce qui termine la démonstration.

Question 6. .... (20 points)

Étant donné un graphe simple G, on suppose que seulement les fonctions suivantes sont disponibles :

- G.sommets() retourne l'ensemble des sommets du graphe G ;
- G.arêtes() retourne l'ensemble des arêtes du graphe G ;
- G.voisins(u) retourne l'ensemble des voisins du sommet u dans le graphe G ;
- G.degré(u) retourne le degré du sommet u dans G ;
- G.estConnexe() retourne *vrai* si et seulement si G est un graphe connexe.

(a) (10 points) Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction EstEulérien(G : graphe simple) : booléen

qui retourne *vrai* si et seulement si G est un graphe eulérien.

Solution: Il suffit de vérifier si tous les sommets sont de degré pair (et de ne pas oublier de vérifier la connexité !). On obtient donc

```
fonction EstEulérien(G : graphe simple) : booléen
    si ¬G.estConnexe() alors
        retourner faux
    sinon
        pour v ∈ G.sommets() faire
            si G.degré(v) est impair alors
                retourner faux
            fin si
        fin pour
    fin si
    retourner vrai
fin fonction
```

(b) (10 points) Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ et un nombre entier $k \geq 1$, on dit d'une fonction $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ qu'elle est un k-*coloriage* de G si $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête $\{u, v\} \in E$. Donnez le pseudocode d'une fonction

fonction EstColoriage(G : graphe simple, c : fonction) : booléen

qui retourne *vrai* si et seulement si la fonction c est bien un coloriage de G.

Solution: Il suffit de vérifier, pour chaque arête, si les extrémités sont de couleurs différentes. On trouve

```
fonction EstColoriage(G : graphe simple, c : fonction) : booléen
    pour {u, v} ∈ G.arêtes() faire
        si c(u) = c(v) alors
            retourner faux
        fin si
    fin pour
    retourner vrai
fin fonction
```